

デジタルメディア処理

担当: 井尻 敬

Contents

達成目標

- 画像・音に関するフーリエ変換の基本的な効果を説明できる
- フーリエ級数の概要を説明できる
- 周波数フィルタ処理の計算法と効果を説明できる

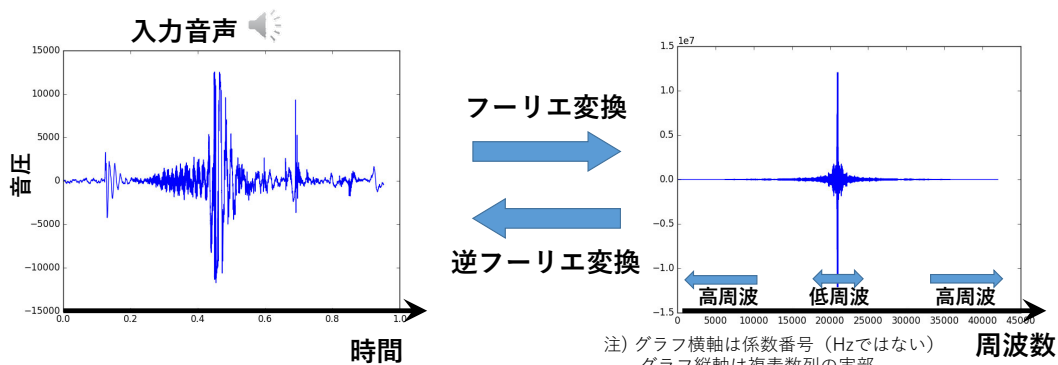
Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数
- オイラーの式と複素数表現
- 離散フーリエ変換
- 周波数フィルタリング

フーリエ変換とは (音)

FourierSound.py

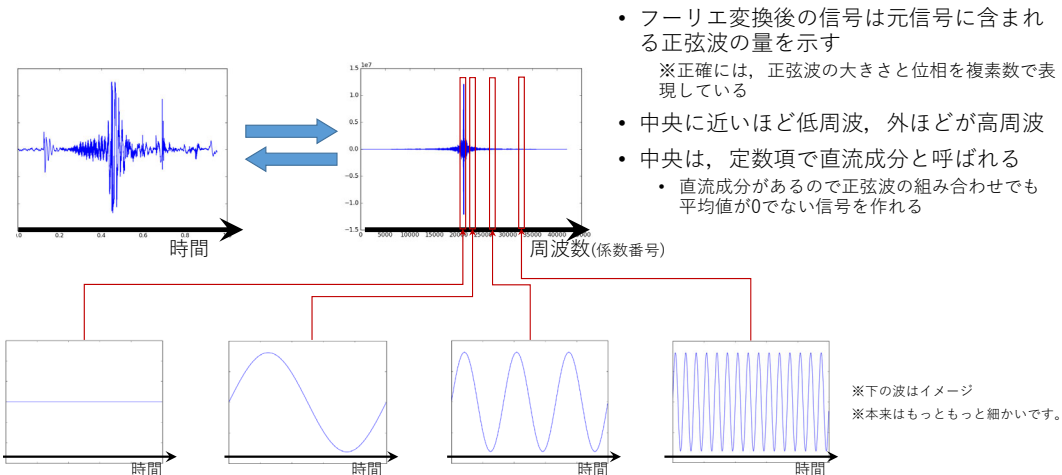
時間に関する信号 (横軸が時間の関数) を、
周波数に関する信号 (横軸が周波数の関数) に変換する手法

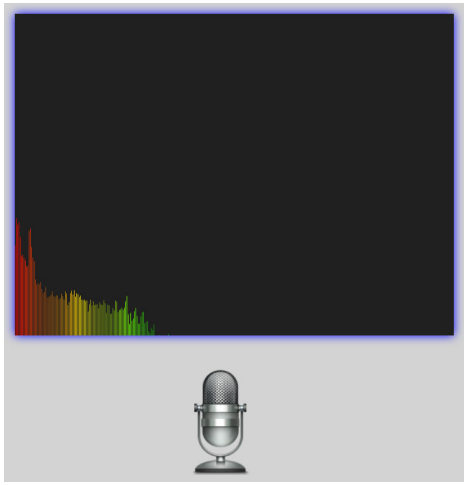


※) 両関数とも複素数関数となる (デジタルデータの場合は複素数列)

フーリエ変換とは (音)

FourierSound.py



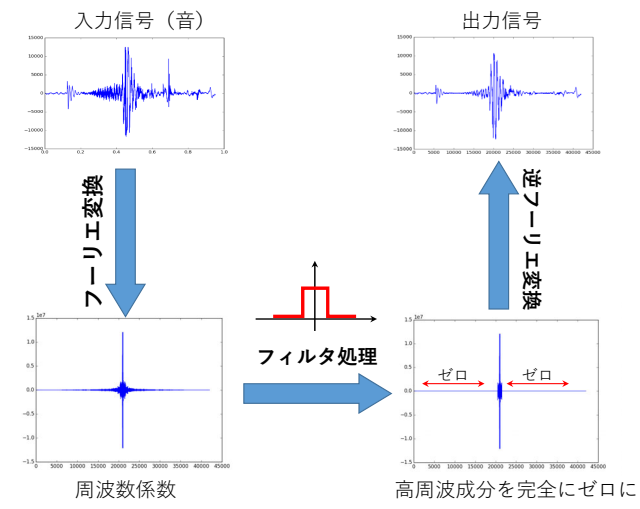


音の実時間フーリエ変換

データ量に依存するが1D/2Dのフーリエ変換は高速なので
実時間解析可能

リアルタイムフーリエ変換
by Hidetomo Kataoka @ 立命館大

周波数フィルタリング (音)



フーリエ変換により周波数を考慮したfilterが設計できる

1. フーリエ変換し
2. 周波数空間でフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

周波数フィルタリング (音)

イコライザ

周波数ごとにボリュームを調整する音質調整器

1. 音源をフーリエ変換し
2. 周波数ごとにフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

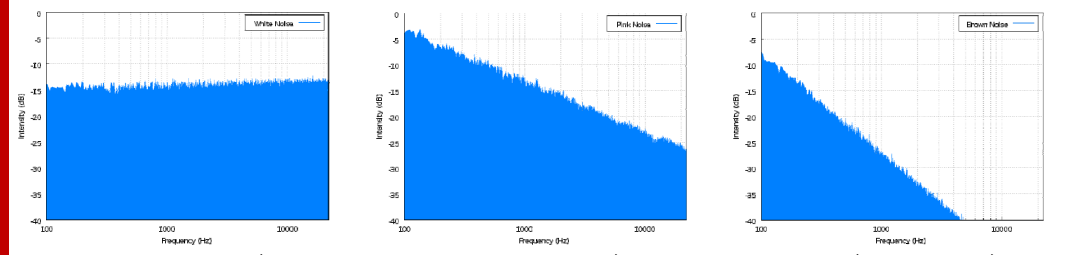


iTunesのイコライザ

Windows Media Player > 右クリック > 拡張設定 > グラフィックイコライザ

余談 (ノイズ)

ノイズ (雑音) には、それが含む周波数の分布に応じて特定の名前が付いたものがある



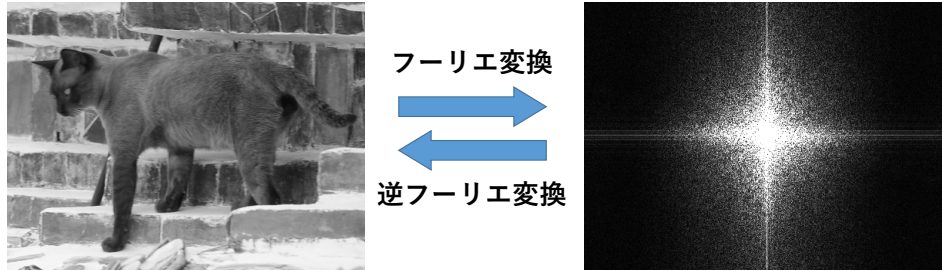
ホワイトノイズ
スペクトルが一様に分布

ピンクノイズ
スペクトル分布が 1/f に比例

ブラウンノイズ
スペクトル分布が 1/f² に比例

フーリエ変換とは (画像)

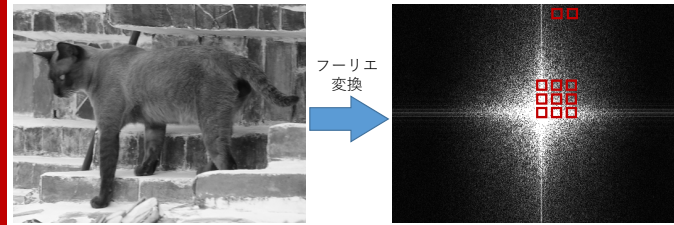
空間に関する信号 (横軸が空間の関数) を、
周波数に関する信号 (横軸が周波数の関数) に変換する手法



画像
(2D空間に画素が並ぶ)

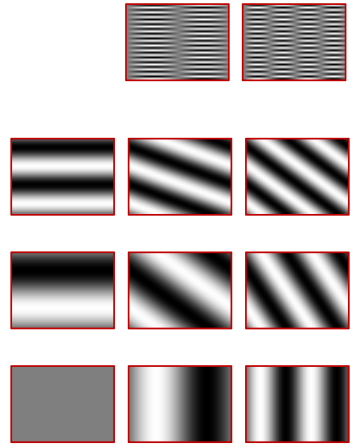
周波数画像 (詳細後述)
※複素数の絶対値を表示

フーリエ変換とは (画像)



- フーリエ変換後の画像の画素は元信号に含まれる正弦波の量(正しくは大きさと位相)を示す
- 中央付近が低周波, 外側が高周波
- 中央画素は, 定数項 (直流成分)

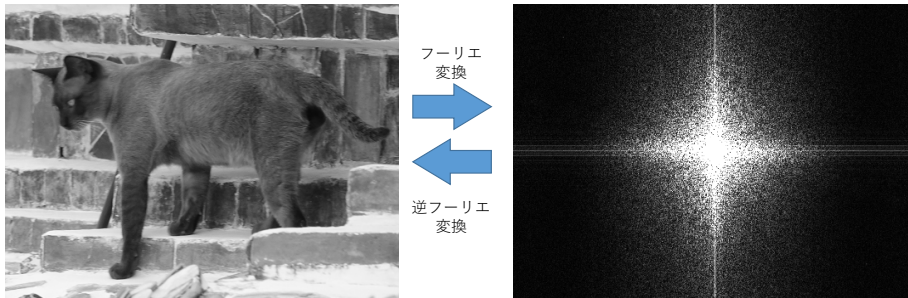
→ 任意の画像はしましま画像の和で表現できる



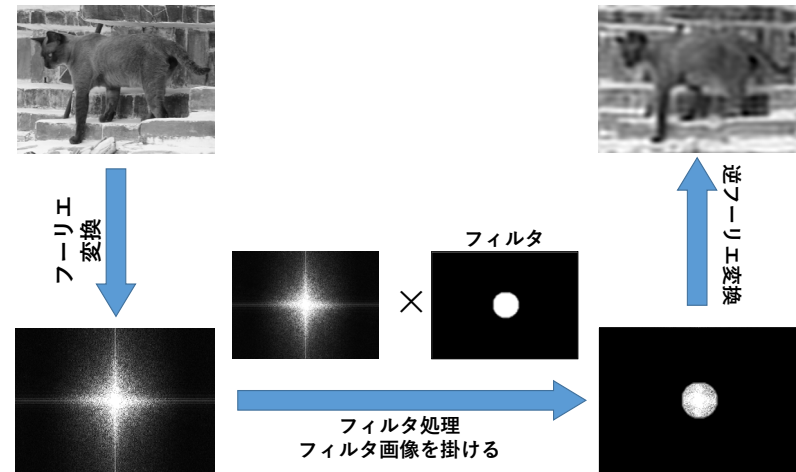
この図はイメージです
本来は現画像と同サイズで
もっと細かいです

フーリエ変換とは (画像)

FourierPaint.py

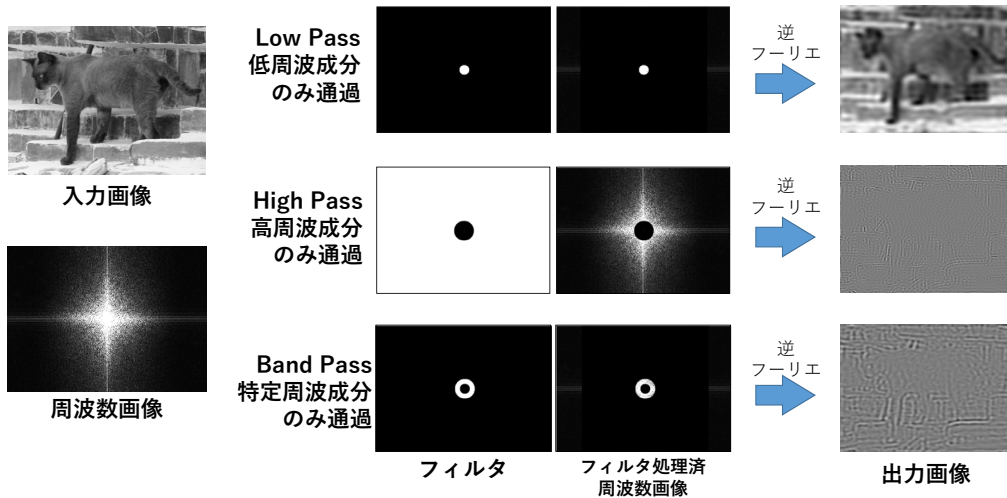


周波数フィルタリング (画像)



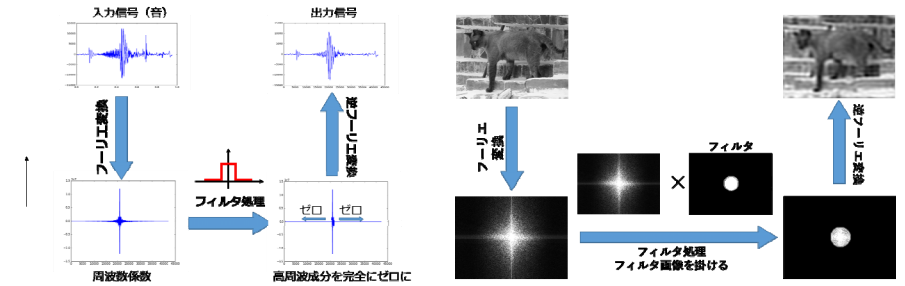
説明のため low pass の
半径を大きく可視化
本当はもっと小さい

周波数フィルタリング（画像）



まとめ：音・画像のフーリエ変換の概要

- フーリエ変換は、時間・空間に関する信号を周波数に関する信号に変換
- 逆フーリエ変換も定義される
- フーリエ変換を利用し周波数空間でフィルタ処理すると、周波数に特化した信号処理が可能



フーリエ級数（の簡単な解説）

注意)

本講義では、フーリエ変換の意味的な理解と画像処理応用に重点を置きます。証明と導出の詳細は、信号処理の講義をとるか「[金谷健一:これなら分かる応用数学教室](#)」を参照してください。

練習

三角関数を合成せよ

$$a \sin \theta + b \cos \theta$$

n と m を非負整数として以下を計算せよ

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi n}{T} x \cos \frac{2\pi m}{T} x dx$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi n}{T} x \sin \frac{2\pi m}{T} x dx$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi n}{T} x \cos \frac{2\pi m}{T} x dx$$

$$(1) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi x}{T} \cos \frac{2\pi x}{T} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{\sin \frac{2\pi x}{T} (m+m)}_{\frac{0}{1}} + \underbrace{\sin \frac{2\pi x}{T} (m-m)}_{\frac{0}{1}} dx = 0$$

$$(2) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{2\pi x}{T} \sin \frac{2\pi x}{T} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi x}{T} (m+m) + \cos \frac{2\pi x}{T} (m-m) dx$$

$m \neq m$ のとき

$$= \frac{1}{2} \frac{T}{2\pi} \left[\frac{-1}{m+m} \sin \frac{2\pi x}{T} (m+m) + \frac{1}{m-m} \sin \frac{2\pi x}{T} (m-m) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$$

$m = m$ のとき

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} -\cos \frac{2\pi x}{T} (m+m) + 1 dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{T}{2}$$

$$(3) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi x}{T} \cos \frac{2\pi x}{T} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi x}{T} (m+m) + \cos \frac{2\pi x}{T} (m-m) dx$$

$m \neq m$ のとき

$$= \frac{1}{2} \frac{T}{2\pi} \left[\frac{1}{m+m} \sin \frac{2\pi x}{T} (m+m) + \frac{1}{m-m} \sin \frac{2\pi x}{T} (m-m) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = 0$$

$m = m$ のとき

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{2\pi x}{T} (m+m) + 1 dx = \frac{T}{2}$$

練習
三角関数を合成せよ
 $a \sin \theta + b \cos \theta$

n と m を非負整数として以下を計算せよ

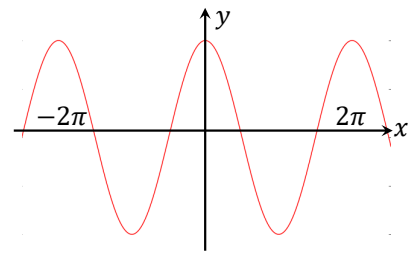
$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi n}{T} x \cos \frac{2\pi m}{T} x dx = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi n}{T} x \sin \frac{2\pi m}{T} x dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \end{cases}$$

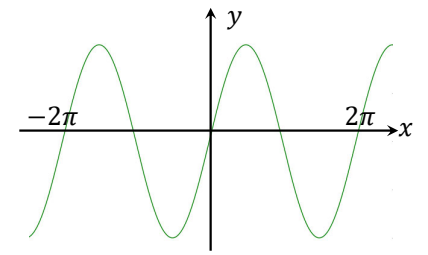
$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi n}{T} x \cos \frac{2\pi m}{T} x dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \end{cases}$$

三角関数

$$y = \cos x$$



$$y = \sin x$$

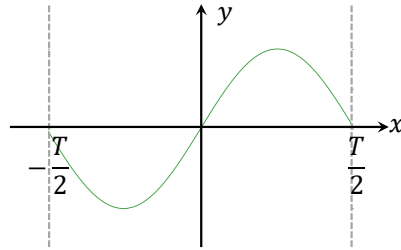
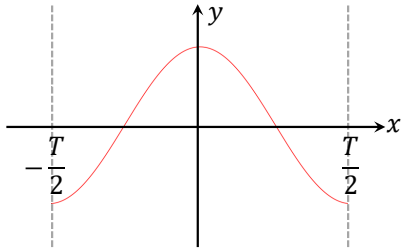


まあこれはいいですよね

三角関数

$$y = \cos \frac{2\pi}{T} x = \cos \omega_0 x$$

$$y = \sin \frac{2\pi}{T} x = \sin \omega_0 x$$

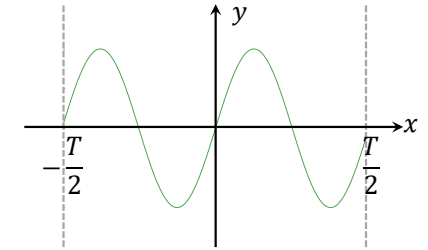
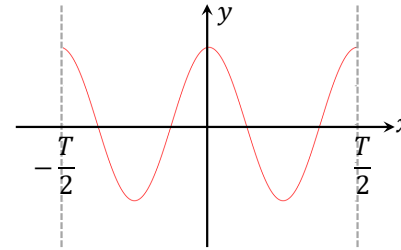


T を周期、 ω_0 を基本(角)周波数と呼びます
 $[-T/2, T/2]$ でひと周期の波を取得できました

三角関数

$$y = \cos 2\omega_0 x$$

$$y = \sin 2\omega_0 x$$

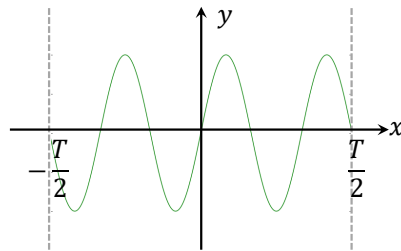
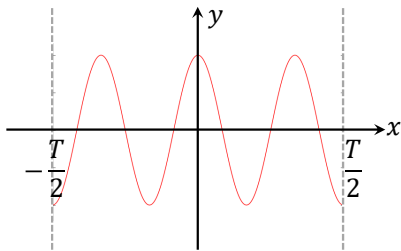


三角関数の引数を2倍すると、周波数が2倍に、周期が1/2倍になります

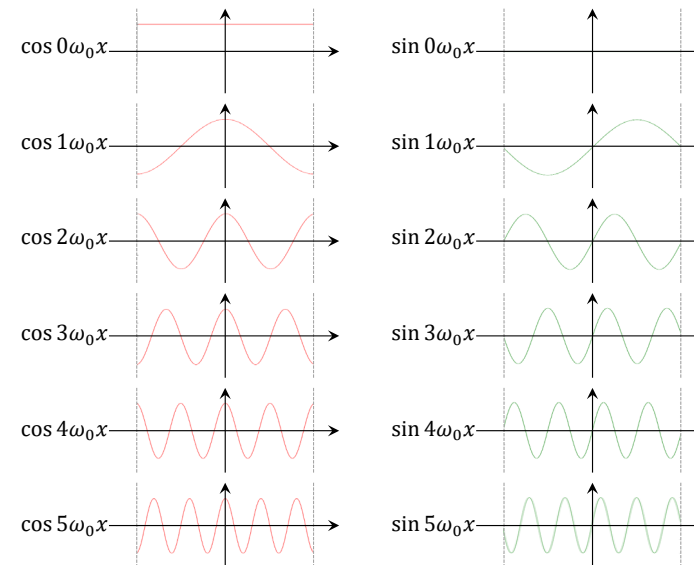
三角関数

$$y = \cos 3\omega_0 x$$

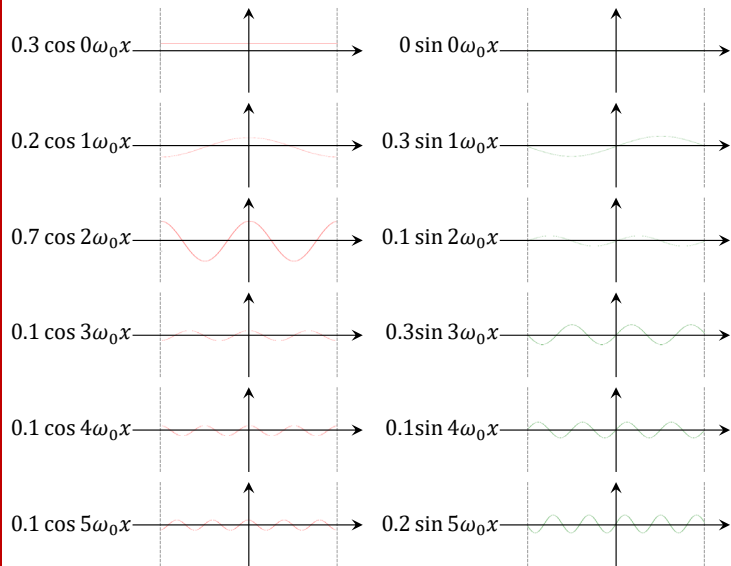
$$y = \sin 3\omega_0 x$$



三角関数の引数を3倍すると、周波数が3倍に、周期が1/3倍になります



こんな感じで基本周波数の整数倍の波を考える

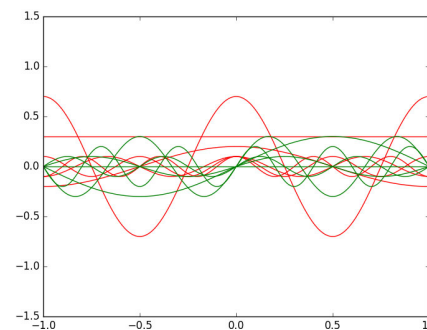


こんな感じで基本周波数の整数倍の波を考える

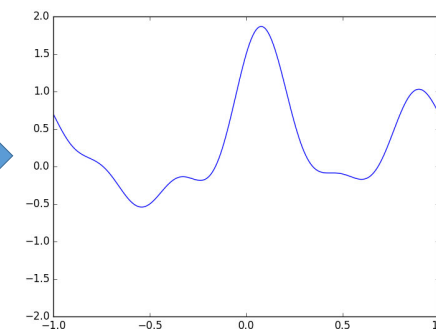
それぞれを定数倍する (今回はランダムに)

で、それを全部足し合わせてみる

$$0.3 \cos 0\omega_0 x + 0.2 \cos 1\omega_0 x + 0.7 \cos 2\omega_0 x + 0.1 \cos 3\omega_0 x + 0.1 \cos 4\omega_0 x + 0.1 \cos 5\omega_0 x + 0.0 \sin 0\omega_0 x + 0.3 \sin 1\omega_0 x + 0.1 \sin 2\omega_0 x + 0.3 \sin 3\omega_0 x + 0.1 \sin 4\omega_0 x + 0.2 \sin 5\omega_0 x$$



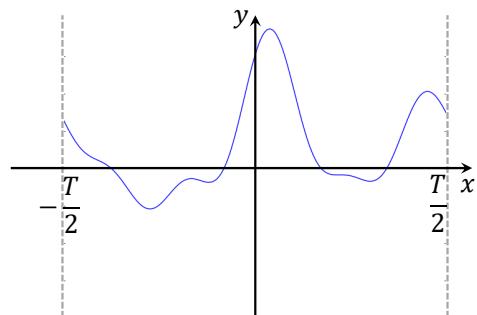
和



フーリエ級数のとても簡単 (雑) な説明

$[-T/2, T/2]$ の周期関数 f は、周波数 $k\omega_0$ ($k=0,1,2,\dots$)の三角関数の重ね合わせで表現できる (証明など詳細は信号処理の講義へ)

周期関数を受け取ると、この周期関数から重ね合わせに必要な各関数の係数を推定できる (どうやって?)



- | | |
|--------------|--------------|
| 0.3 cos 0ω₀x | 0.0 sin 0ω₀x |
| 0.2 cos 1ω₀x | 0.3 sin 1ω₀x |
| 0.7 cos 2ω₀x | 0.1 sin 2ω₀x |
| 0.1 cos 3ω₀x | 0.3 sin 3ω₀x |
| 0.1 cos 4ω₀x | 0.1 sin 4ω₀x |
| 0.1 cos 5ω₀x | 0.2 sin 5ω₀x |

『この元信号の中には、 $\cos 2\omega_0 x$ の成分が0.7だけ含まれている』というのが分かる

フーリエ級数のとても簡単な説明

合成後の周期関数 $f(x)$ を受け取ると、この合成後の波から合成前の各関数の係数を推定する ←どうやって??

例 $\cos 2\omega_0 x$ の係数を知りたい場合...

1) $f(x)$ に $\cos 2\omega_0 x$ を掛けた関数を作る

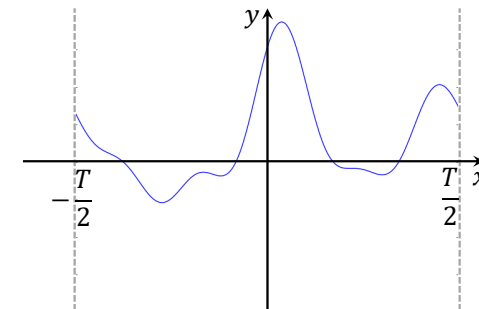
$$f(x) \cos 2\omega_0 x$$

2) 係数 $\frac{2}{T}$ もかける

$$\frac{2}{T} f(x) \cos 2\omega_0 x$$

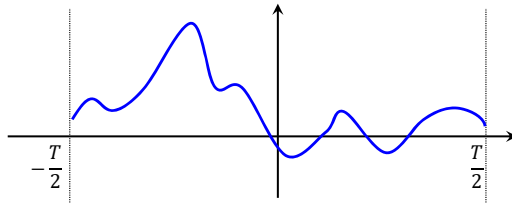
3) これを周期分だけ積分すると係数が得られる

$$\text{係数} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos 2\omega_0 t dt$$



フーリエ級数

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、フーリエ級数で表現できる。



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt$$

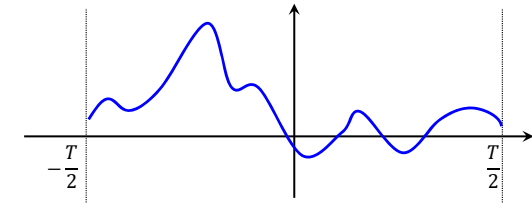
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$: 基本周波数

※天下り的な説明で済みません。ここではそういう事実があると知っておいてください。

※詳細な導出と証明は、信号処理の講義、または、『これなら分かる応用数学教室（金谷健一著）』を参照

フーリエ級数

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、フーリエ級数で表現できる。



$$f(t) = \frac{a_0}{2}$$

$$+ a_1 \cos 1\omega_0 t + b_1 \sin 1\omega_0 t$$

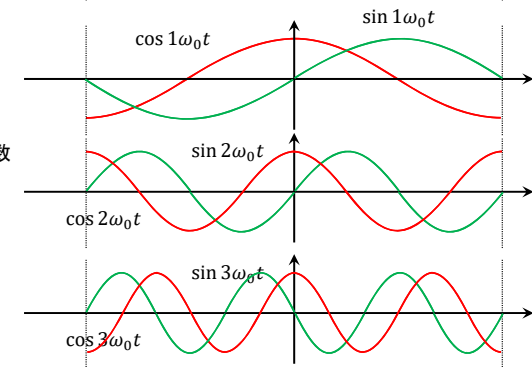
$$+ a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t$$

$$+ a_3 \cos 3\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t$$

+ ...

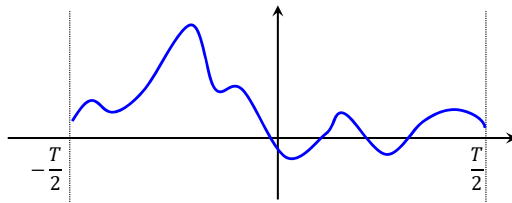
基本周波数

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



フーリエ級数

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、フーリエ級数で表現できる。



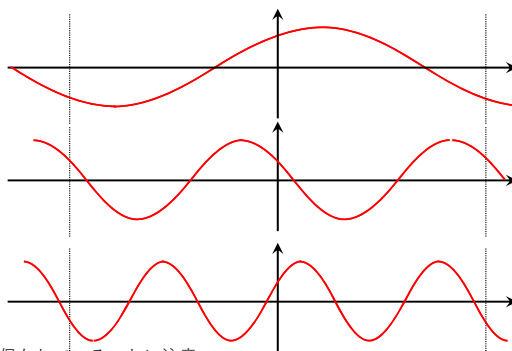
$$f(t) = \frac{a_0}{2}$$

$$+ a_1' \sin(1\omega_0 t + \phi_1)$$

$$+ a_2' \sin(2\omega_0 t + \phi_2)$$

$$+ a_3' \sin(3\omega_0 t + \phi_3)$$

+ ...



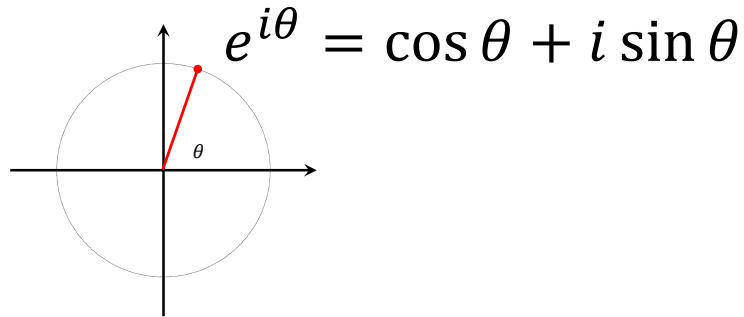
「sin と cos の振幅を変えて足す」とも思えるが、「 a_k と b_k で振幅と位相ずれを制御する」とも見てもよい

位相がずれても、 $-\frac{T}{2}$ と $\frac{T}{2}$ における位置は同じなので、周期性は保たれていることに注意

Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数
- **オイラーの式と複素数表現**
- 離散フーリエ変換
- 周波数フィルタリング

オイラーの式



$e^{i\theta}$ はガウス平面における単位円に乗る

練習) 複素数の積を求めよ

- $a (\cos \theta + i \sin \theta) * b (\cos \phi + i \sin \phi)$

以下の関係を証明せよ

- $e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$

- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

- $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

- $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

フーリエ級数の複素数表現

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、フーリエ級数で表現できる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} : \text{基本周波数}$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

練習: 下の式(1)-(5)より, 式(6),(7)を導け

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \dots (1)$$

$$a_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt \dots (2)$$

$$b_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt \dots (3)$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \dots (4)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \dots (5)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t} \dots (6)$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \dots (7)$$

以下のフーリエ級数展開が成り立つものとする。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t) \dots (1)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt \dots (2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt \dots (3)$$

一方オイラーの式より、

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \dots (4)$$

が得られる。

式(4)を式(1)へ代入し整理すると、

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t}}{2} + b_k \frac{e^{ik\omega_0 t} - e^{-k\omega_0 t}}{2i} \right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k (e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t}) - ib_k (e^{ik\omega_0 t} - e^{-k\omega_0 t}))$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} ((a_k - ib_k) e^{ik\omega_0 t} + b_k (a_k + ib_k) e^{-k\omega_0 t})$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t} \dots (5)$$

ただし、

$$C_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \\ \frac{a_k + ib_{-k}}{2} & k < 0 \end{cases} \dots (6)$$

と置いた。

また、式(6)に式(2)(3)を代入し整理すると、

$$\frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt - i \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega_0 t - i \sin k\omega_0 t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \dots (7)$$

$$\frac{a_k + ib_{-k}}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos -k\omega_0 t dt + i \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin -k\omega_0 t dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega_0 t + i \sin k\omega_0 t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{ik\omega_0 t} dt \dots (8)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i0\omega_0 t} dt \dots (9)$$

上記(5,6,7,8,9)より、

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t},$$

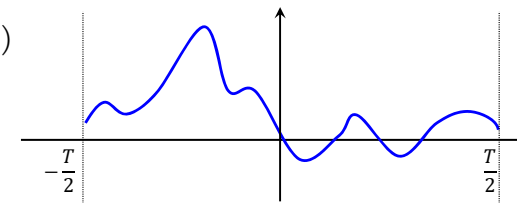
$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \dots (10)$$

フーリエ級数展開の複素数表現が得られる。

フーリエ級数(複素数表記)

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、

フーリエ級数で表現できる。



$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

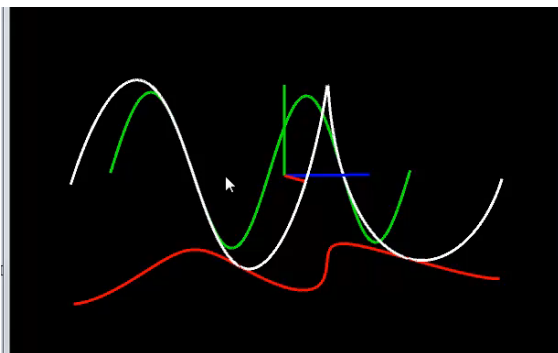
(ここでもこれまでと同じだけど) 大切なのは、元の関数が基本周波数の整数倍の正弦波の重ね合わせで表現できること

この複素数表記された正弦波を重ね合わせていることは分かるんだけど、 $\cos k\omega_0 t, \sin k\omega_0 t$ に比べてイメージしにくい

フーリエ級数(複素数表記)

$$e^{ik\omega_0 t} = \cos k\omega_0 t + i \sin k\omega_0 t$$

この正弦波は何なのか？



赤が実軸
緑が虚軸
青が時間軸

<https://www.youtube.com/watch?v=YjEkBjDhbr4>

まとめ: フーリエ級数

※今回は導出と証明を省きました
詳しく知りたい人は教科書参照

• フーリエ級数: 周期 T を持つ関数は下記の通り正弦波の重ね合わせで表現可

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t), \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt$$

• オイラーの式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}, \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

• フーリエ級数(複素数表現):

上式にオイラーの式を代入すると以下のように変形できる

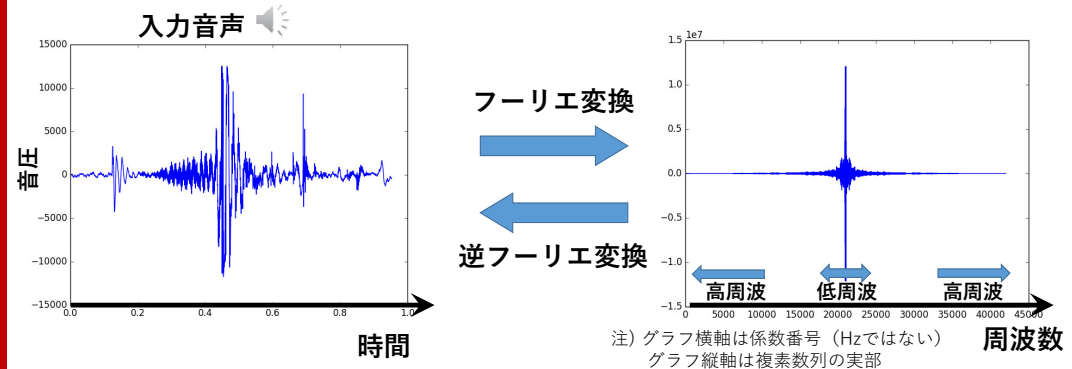
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数
- オイラーの式と複素数表現
- **離散フーリエ変換**
- 周波数フィルタリング

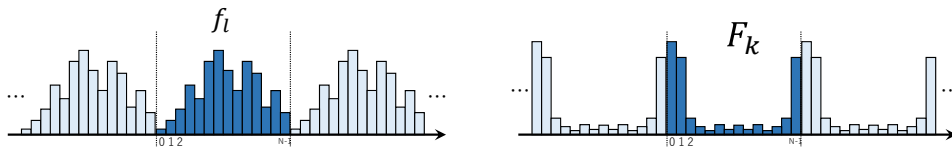
フーリエ変換とは (音)

時間に関する信号 (横軸が時間の関数) を、周波数に関する信号 (横軸が周波数の関数) に変換する手法



※) 両関数とも複素数関数となる (デジタルデータの場合は複素数列)

離散フーリエ変換 (1D)



入力: 周期 N の複素数列 f_l (実数列のことも多い)

出力: 周期 N の複素数列 F_k

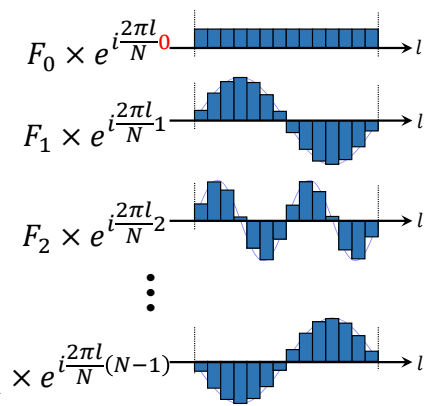
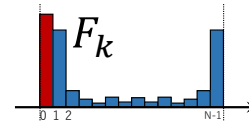
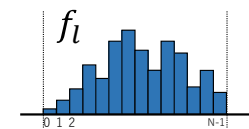
$$\text{フーリエ変換 } F_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i \frac{2\pi k l}{N}}$$

$$\text{逆フーリエ変換 } f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i \frac{2\pi k l}{N}}$$

フーリエ変換『周期 N の離散値 f_l 』を『周期 N の離散値 F_k 』に変換する

F_k : k 番目の周波数係数: 入力信号に含まれる k 番目の正弦波 $e^{i \frac{2\pi k l}{N}}$ の大きさと位相ずれを表す

$$f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i \frac{2\pi k l}{N}}$$



※グラフは全て複素数

- F_0 は定数 (直流成分) に対応
- F_k は $[0, N-1]$ 区間において k 回振動する正弦波に対応
- $k=N/2$ がもっとも高周波で, $k=N-1$ は $k=1$ の正弦波と同じ周波数 (位相は逆)

離散フーリエ変換の計算例

$N=8$ のとき

入力: $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i \frac{2\pi k l}{N}}$$

↑複素数とかできて
ややこしそうだけど
ただの和分

$$F_0 = \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\cos \frac{2\pi 0}{8} - i \sin \frac{2\pi 0}{8} \right) + f_1 \left(\cos \frac{2\pi 0}{8} - i \sin \frac{2\pi 0}{8} \right) + \dots + f_7 \left(\cos \frac{2\pi 0}{8} - i \sin \frac{2\pi 0}{8} \right) \right]$$

$$F_1 = \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\cos \frac{2\pi 1}{8} - i \sin \frac{2\pi 1}{8} \right) + f_1 \left(\cos \frac{2\pi 1}{8} - i \sin \frac{2\pi 1}{8} \right) + \dots + f_7 \left(\cos \frac{2\pi 7}{8} - i \sin \frac{2\pi 7}{8} \right) \right]$$

$$F_2 = \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\cos \frac{2\pi 2}{8} - i \sin \frac{2\pi 2}{8} \right) + f_1 \left(\cos \frac{2\pi 2}{8} - i \sin \frac{2\pi 2}{8} \right) + \dots + f_7 \left(\cos \frac{2\pi 14}{8} - i \sin \frac{2\pi 14}{8} \right) \right]$$

$$F_3 = \frac{1}{8} \left[f_0 \left(\cos \frac{2\pi 3}{8} - i \sin \frac{2\pi 3}{8} \right) + f_1 \left(\cos \frac{2\pi 3}{8} - i \sin \frac{2\pi 3}{8} \right) + \dots + f_7 \left(\cos \frac{2\pi 21}{8} - i \sin \frac{2\pi 21}{8} \right) \right]$$

⋮

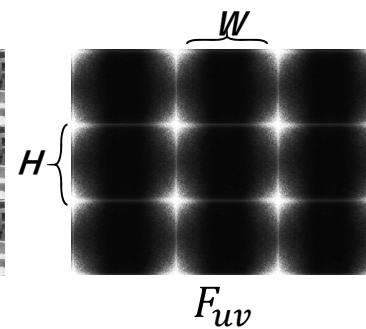
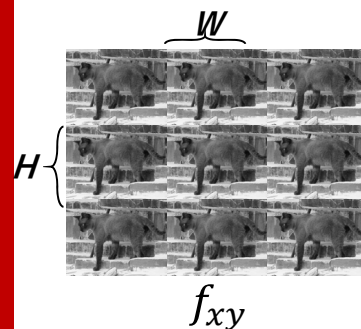
離散フーリエ変換 (2D)

フーリエ変換:

$$F_{uv} = \frac{1}{WH} \sum_{y=0}^{H-1} \sum_{x=0}^{W-1} f_{xy} e^{-\frac{2\pi x u}{W} i} e^{-\frac{2\pi y v}{H} i}$$

逆フーリエ変換:

$$f_{xy} = \sum_{v=0}^{H-1} \sum_{u=0}^{W-1} F_{uv} e^{\frac{2\pi x u}{W} i} e^{\frac{2\pi y v}{H} i}$$

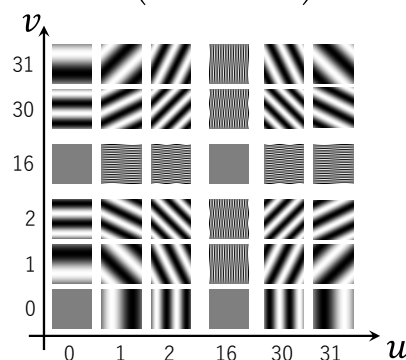


縦横方向に周期H/Wで繰り返す離散値 f_{xy} を、離散値 F_{uv} に変換
 f_{xy} と F_{uv} は複素数列。
ただし、 f_{xy} は画像 (実数列) のことが多い



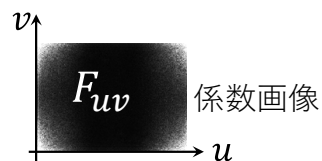
$$f_{xy} = \sum_{v=0}^{H-1} \sum_{u=0}^{W-1} F_{uv} e^{\left(\frac{2\pi x u}{W} + \frac{2\pi y v}{H} \right) i}$$

$W=H=32$ のときの
 $\sin \left(\frac{2\pi x u}{W} + \frac{2\pi y v}{H} \right)$



$F_{u,v}$ は上の (u,v) 番目の画像の係数

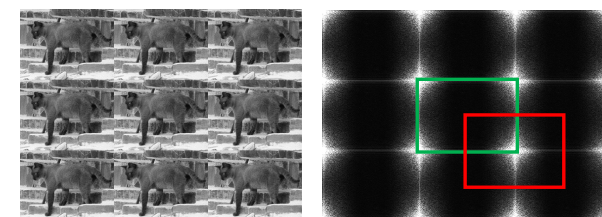
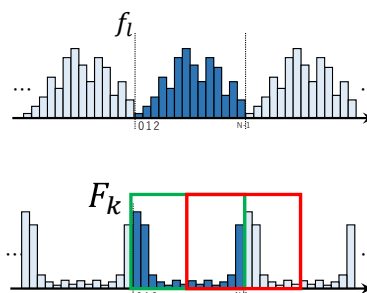
実際は $e^{\left(\frac{2\pi x u}{W} + \frac{2\pi y v}{H} \right) i}$ は複素数画像



係数画像

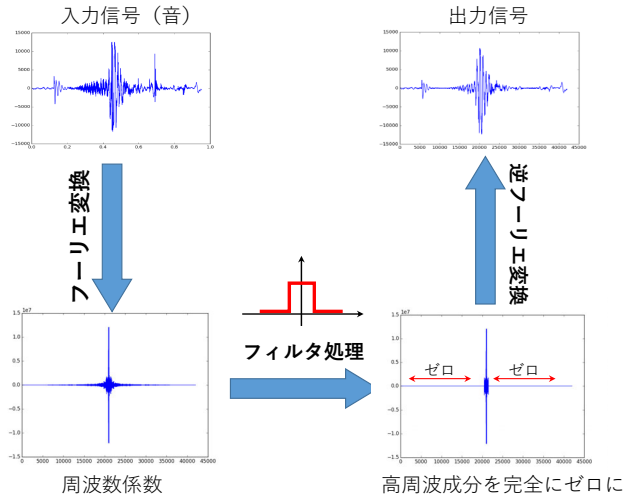
- $F_{0,0}$ は定数 (直流成分) の係数
- $F_{u,v}$ は、画像区間において『縦に u 回・横に v 回振動する正弦波画像』の係数
- $u=v=N/2$ がもっとも高周波で、 $u=N-1$ は $u=1$ の正弦波と同じ周波数 (位相は逆)

Shiftの話



- フーリエ変換を実装すると、ピークが端に来る変換結果になる
 - 上図緑四角: これは間違いじゃない
 - 低周波成分を中心においたほうが分かりやすいので上図赤四角の位置を出力することが多い
 - このshiftを行なう関数が用意されていることも → `np.fft.ifftshift()`

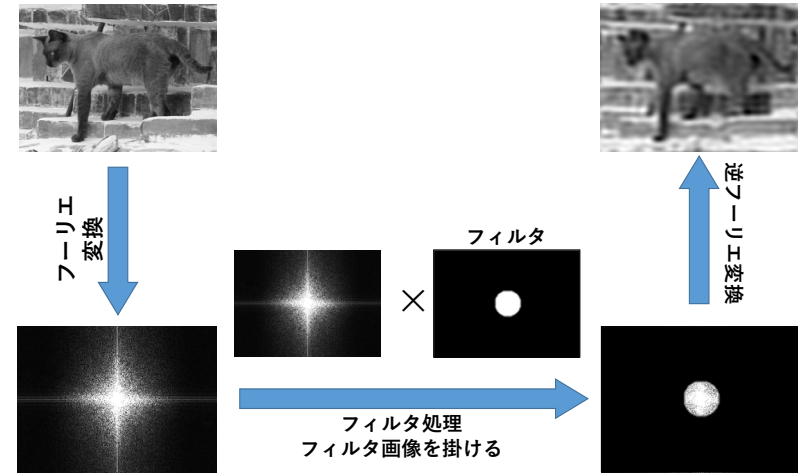
周波数フィルタリング (音)



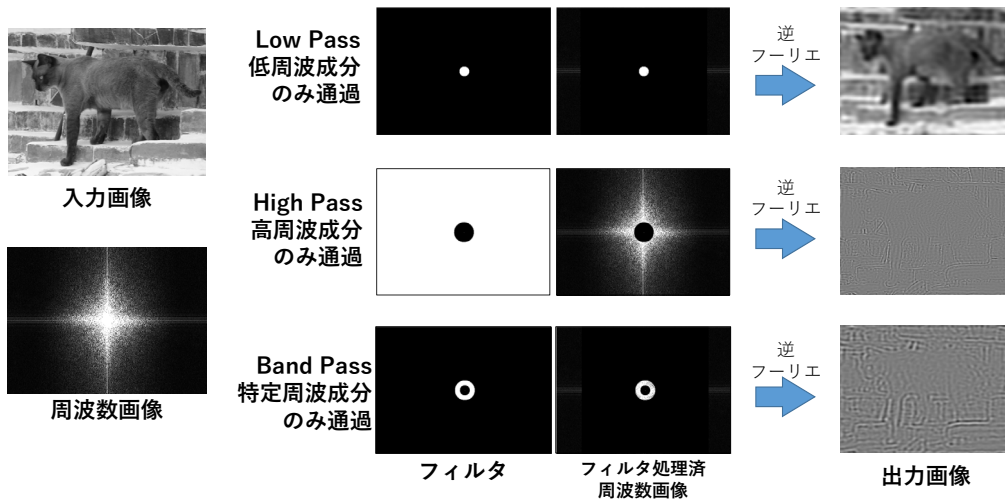
フーリエ変換により周波数を考慮したfilterが設計できる

1. フーリエ変換し
2. 周波数空間でフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

周波数フィルタリング (画像)



周波数フィルタリング (画像)



Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数
- オイラーの式と複素数表現
- 離散フーリエ変換
- 周波数フィルタリング