

デジタルメディア処理

担当: 井尻 敬

Contents

達成目標

- 画像・音に関する離散フーリエ変換の基本的な効果を説明できる
- 周波数フィルタ処理の計算法と効果を説明できる

Contents

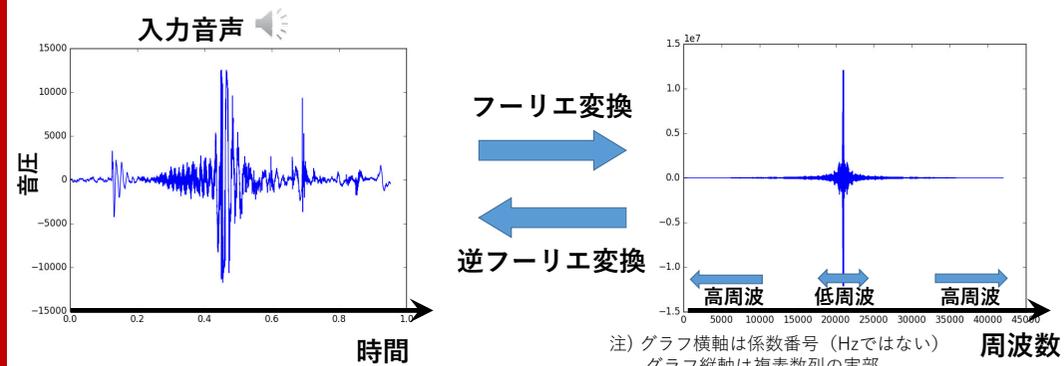
- 離散フーリエ変換の概要
- 離散フーリエ変換
- 周波数フィルタリング
- 高速フーリエ変換

離散フーリエ変換の概要

離散フーリエ変換とは（音）

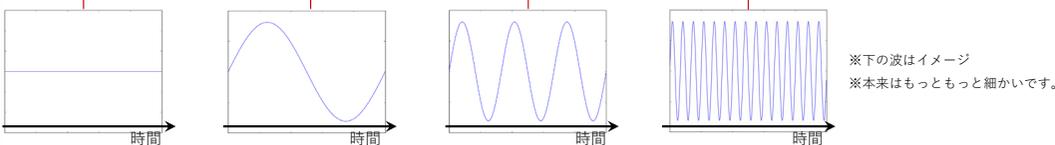
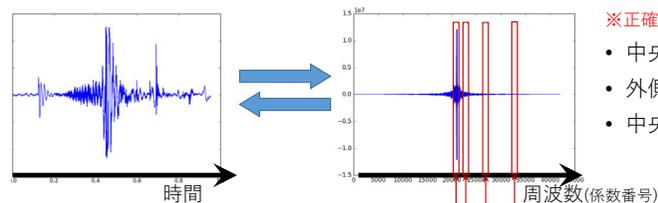
FourierSound.py

時間に関する離散信号（横軸が時間の複素数データ）を、
周波数に関する離散信号（横軸が周波数の複素数データ）に変換する



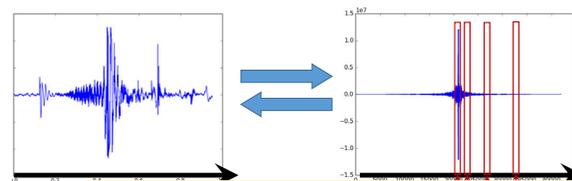
離散フーリエ変換とは (音)

- 離散フーリエ変換後の信号は元信号に含まれる **正弦波の量**を示す
- ※正確には正弦波の大きさと位相ずれを複素数で表現
- 中央付近は低周波に対応
- 外側に行くほど高周波に対応
- 中央は、定数項で直流成分と呼ばれる

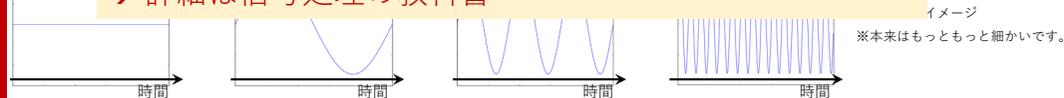


離散フーリエ変換とは (音)

- 離散フーリエ変換後の信号は元信号に含まれる **正弦波の量**を示す
- ※正確には正弦波の大きさと位相ずれを複素数で表現
- 中央付近は低周波に対応
- 外側に行くほど高周波に対応
- 中央は、定数項で直流成分と呼ばれる

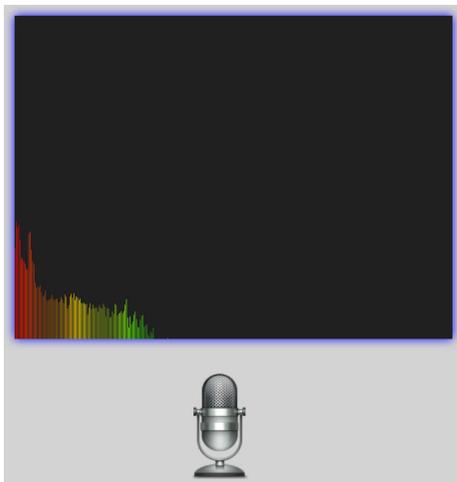


これはつまり、、、
『任意の1次元信号は正弦波の重ね合わせで表現できる』
 ことを表す。
 → 詳細は信号処理の教科書へ

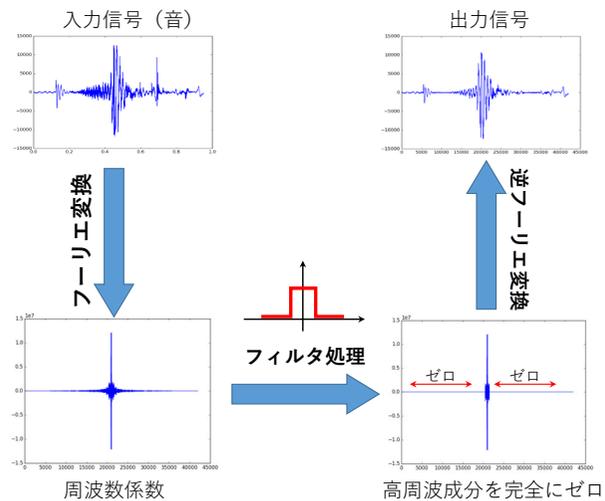


音の実時間フーリエ変換

データ量に依存するが1D/2Dのフーリエ変換は高速なので実時間解析可能



周波数フィルタリング (音)



- 離散フーリエ変換により周波数を考慮したfilterが設計できる
- フーリエ変換し
 - 周波数空間でフィルタを掛け
 - 逆フーリエ変換

周波数フィルタリング（音）

イコライザ

周波数ごとにボリュームを調整する音質調整器

1. 音源をフーリエ変換し
2. 周波数ごとにフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

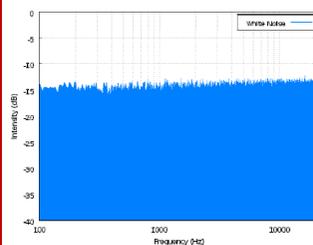


iTunesのイコライザ

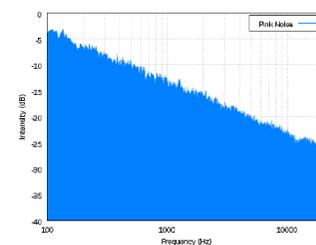
Windows Media Player > 右クリック > 拡張設定 > グラフィックイコライザ

余談（ノイズ）

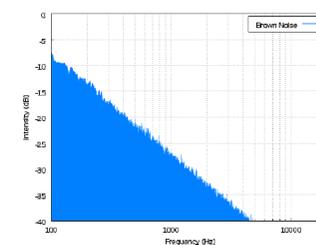
ノイズ（雑音）には、それが含む周波数の分布に応じて特定の名前が付いたものがある



ホワイトノイズ
スペクトルが一様に分布



ピンクノイズ
スペクトル分布が $1/f$ に比例



ブラウンノイズ
スペクトル分布が $1/f^2$ に比例

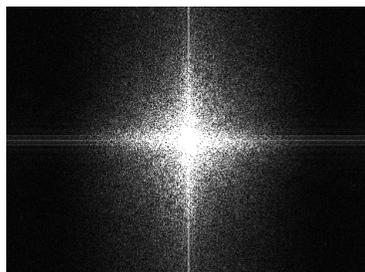
離散フーリエ変換とは（画像）

空間に関する2D信号（画像）を、周波数に関する2D信号（周波数画像）に変換する手法



画像
(2D空間に画素が並ぶ)

フーリエ変換
逆フーリエ変換

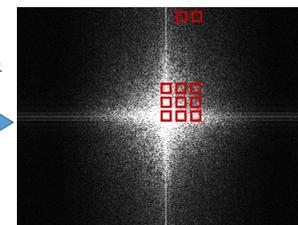


周波数画像（詳細後述）
※複素数の絶対値を表示

フーリエ変換とは（画像）



フーリエ変換



- フーリエ変換後の画像の画素は元信号に含まれる正弦波の量(正しくは大きさと位相)を示す
- 中央付近が低周波、外側が高周波
- 中央画素は、定数項（直流成分）

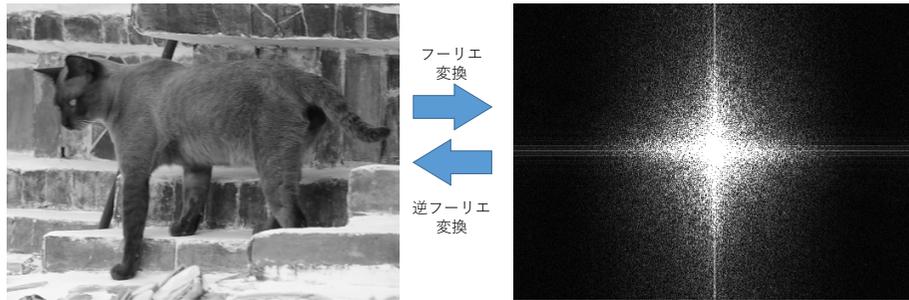
→ 任意の画像はしましま画像の和で表現できる



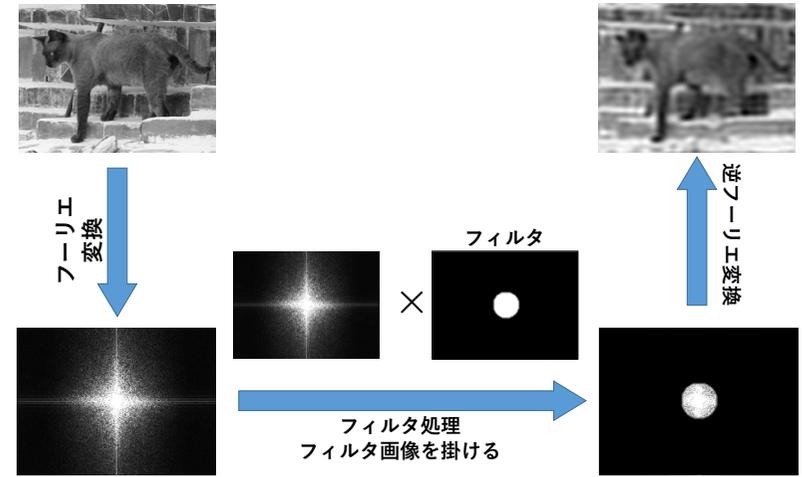
この図はイメージです
本来は現画像と同サイズです
もっと細かいです

フーリエ変換とは (画像)

FourierPaint.py

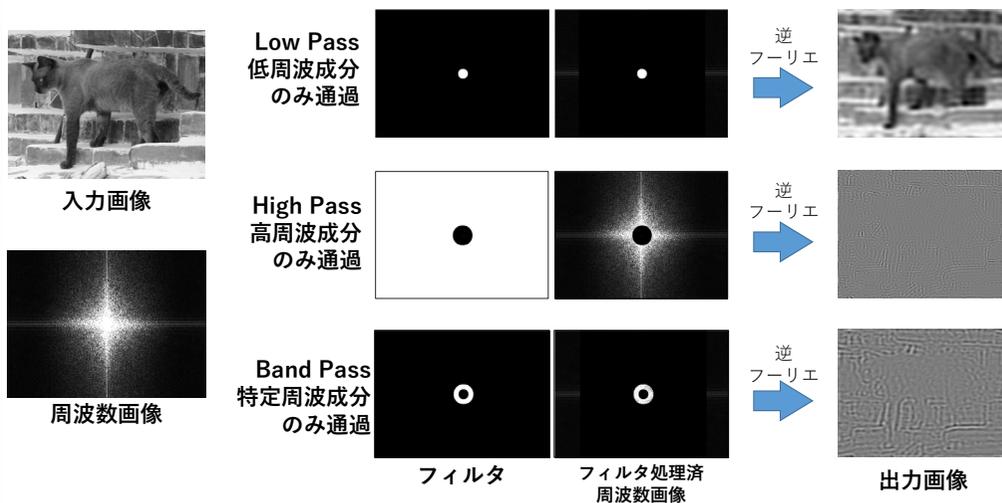


周波数フィルタリング (画像)



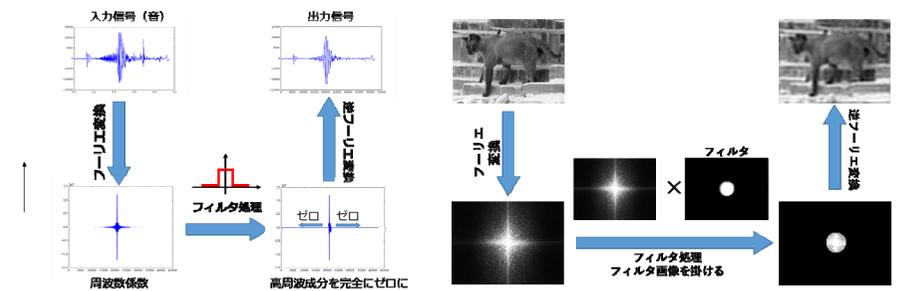
説明のためlow passの半径を大きく可視化
本当はもっと小さい

周波数フィルタリング (画像)



まとめ：音・画像の離散フーリエ変換の概要

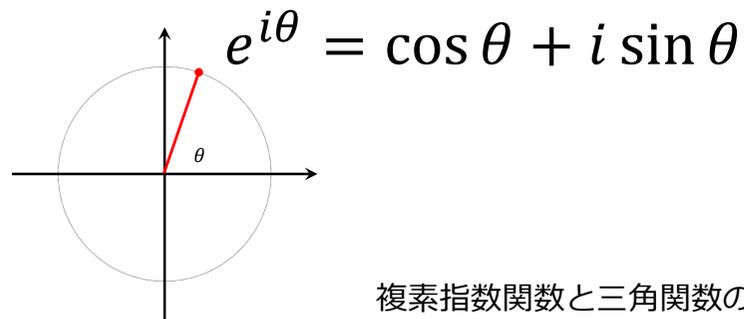
- フーリエ変換は、時間・空間に関する信号を周波数に関する信号に変換
- 逆フーリエ変換も定義される
- フーリエ変換を利用し周波数空間でフィルタ処理すると、周波数に特化した信号処理が可能



Contents

- 離散フーリエ変換概要
- 離散フーリエ変換
 - 準備1) オイラーの式
 - 準備2) 正弦波の重ね合わせ例
 - 離散フーリエ変換
- 周波数フィルタリング
- 高速フーリエ変換

準備 : オイラーの式

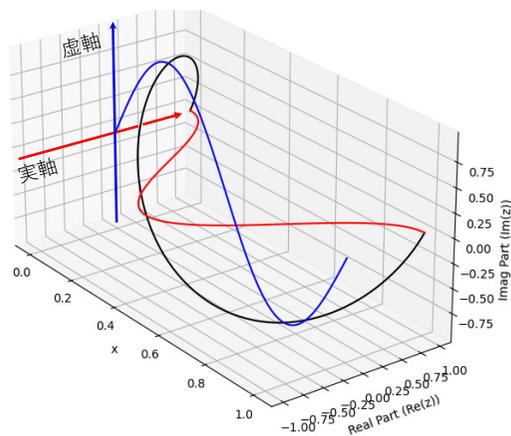


複素指数関数と三角関数の間になり立つ式
両辺をべき級数展開すると証明できる

準備 : $f(x) = e^{i2\pi x}$

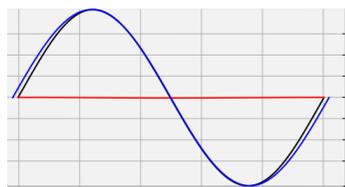
EularFunctionVis.py

- $f(x) = e^{i2\pi x} = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$ という関数の形を考える



ポイント

- x が $[0,1]$ を動くとき1周期
- x 軸・実軸・虚軸の3次元空間における螺旋となる
- 実軸に射影すると $\cos(2\pi x)$ が現れる
- 虚軸に射影すると $\sin(2\pi x)$ が現れる

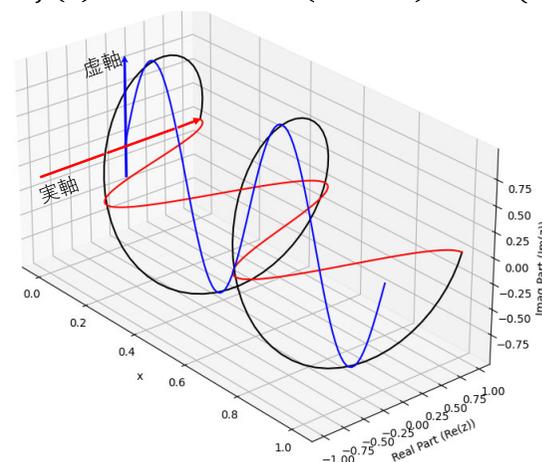


虚軸射影

準備 : $f(x) = e^{i2 \times 2\pi x}$

EularFunctionVis.py

- $f(x) = e^{i2 \times 2\pi x} = \cos(2 \times 2\pi x) + i \sin(2 \times 2\pi x)$ という関数の形を考える



ポイント

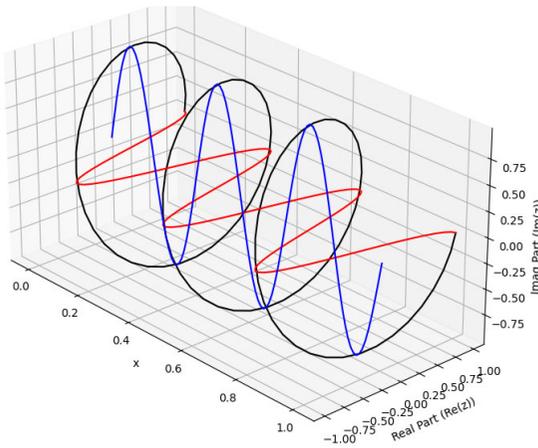
- x が $[0,1]$ を動くとき2周期
- x 軸・実軸・虚軸の3次元空間における螺旋となる
- 実軸に射影すると $\cos(2 \times 2\pi x)$ が現れる
- 虚軸に射影すると $\sin(2 \times 2\pi x)$ が現れる



虚軸射影

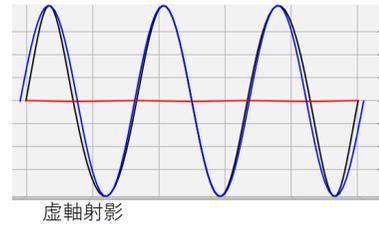
準備: $f(x) = e^{i3 \times 2\pi x}$

• $f(x) = e^{i3 \times 2\pi x} = \cos(3 \times 2\pi x) + i \sin(3 \times 2\pi x)$ という関数の形を考える



ポイント

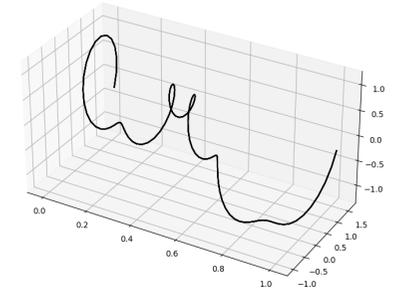
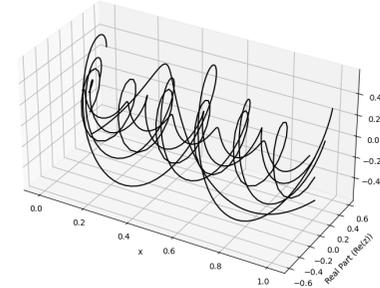
- x が $[0,1]$ を動くとき3周期
- x 軸・実軸・虚軸の3次元空間における螺旋となる
- 実軸に射影すると $\cos(3 \times 2\pi x)$ が現れる
- 虚軸に射影すると $\sin(3 \times 2\pi x)$ が現れる



虚軸射影

準備: $e^{ik2\pi x}$ を位相/振幅を変化させて足してみる

$0.5e^{i1 \times 2\pi x - 1.1} + 0.6e^{i2 \times 2\pi x + 0.5} + 0.4e^{i3 \times 2\pi x + 0.1} + 0.2e^{i4 \times 2\pi x - 0.1} + 0.1e^{i5 \times 2\pi x + 0.5} + 0.3e^{i6 \times 2\pi x - 0.8}$
 ※係数は適当に決めました

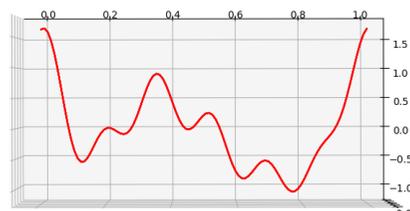
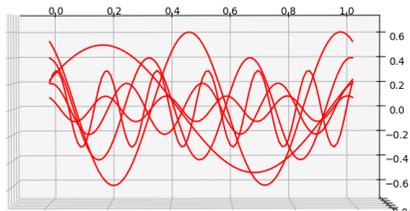


周波数が整数倍の正弦波 $e^{ik2\pi x}$ を足すことで新たな関数を作成できる
 $k \rightarrow \infty$ とすると任意の関数を表現可能なことが知られる (フーリエ級数展開)
 ※ 離散フーリエ変換では、元信号を正弦波 $e^{ik2\pi x}$ の重ね合わせで表現する
 (k 番目の正弦波の振幅・位相ずれが、変換結果として現れる)

準備: $e^{ik2\pi x}$ を位相/振幅を変化させて足してみる

$0.5e^{i1 \times 2\pi x - 1.1} + 0.6e^{i2 \times 2\pi x + 0.5} + 0.4e^{i3 \times 2\pi x + 0.1} + 0.2e^{i4 \times 2\pi x - 0.1} + 0.1e^{i5 \times 2\pi x + 0.5} + 0.3e^{i6 \times 2\pi x - 0.8}$
 ※係数は適当に決めました

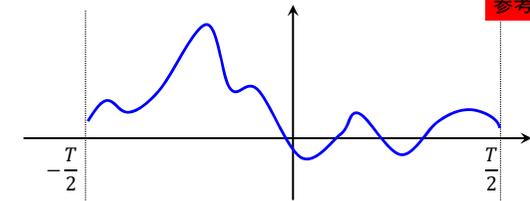
実軸射影



周波数が整数倍の正弦波 $e^{ik2\pi x}$ を足すことで新たな関数を作成できる
 $k \rightarrow \infty$ とすると任意の関数を表現可能なことが知られる (フーリエ級数展開)
 ※ 離散フーリエ変換では、元信号を正弦波 $e^{ik2\pi x}$ の重ね合わせで表現する
 (k 番目の正弦波の振幅・位相ずれが、変換結果として現れる)

フーリエ級数

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、
 フーリエ級数で表現できる。



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} : \text{基本周波数}$$

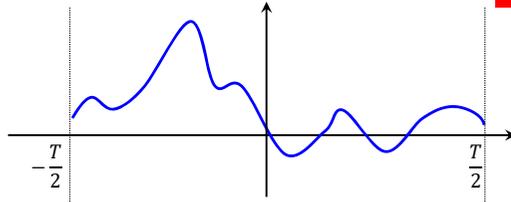
※天下一の説明で済みません。ここではそういう事実があると知っておいてください。

※詳細な導出と証明は、信号処理の講義、または、『これなら分かる応用数学教室 (金谷健一著)』を参照

フーリエ級数(複素数表記)

参考

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、
フーリエ級数で表現できる。



$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

(ここでもこれまでと同じだけど) 大切なのは、元の関数が基本周波数の整数倍の正弦波の重ね合わせで表現できること

この複素数表記された正弦波を重ね合せていることは分かるんだけど、 $\cos k\omega_0 t, \sin k\omega_0 t$ に比べてイメージしにくい

練習1) 複素数の積を求めよ

- $a(\cos \theta + i \sin \theta) * b(\cos \phi + i \sin \phi)$

練習2) 以下の関係を証明せよ

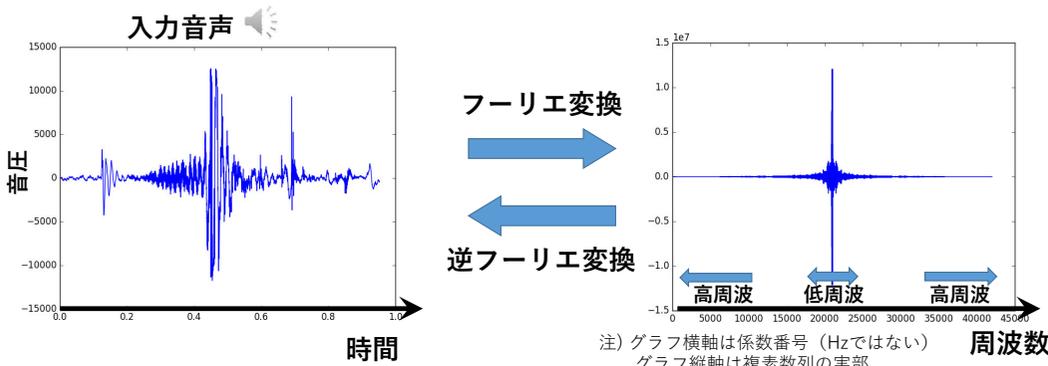
- $e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$

練習3) 正弦波 $e^{i\phi}$ にかけると、振幅をa倍し位相を $+\alpha$ ずらす効果のある複素数を求めよ

フーリエ変換とは (音)

再掲

時間に関する離散信号 (横軸が時間の複素数データ) を、
周波数に関する離散信号 (横軸が周波数の複素数データ) に変換する



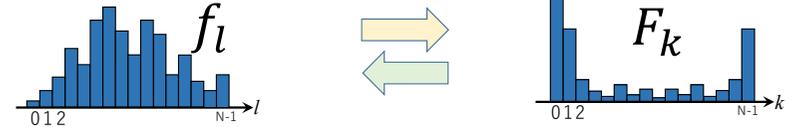
注) グラフ横軸は係数番号 (Hzではない)
グラフ縦軸は複素数列の実部

※) 両関数とも複素数関数となる (デジタルデータの場合は複素数列)

離散フーリエ変換 (1D)

フーリエ変換 $F_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i2\pi \frac{kl}{N}}$

逆フーリエ変換 $f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi \frac{kl}{N}}$



長さ N の複素数列 f_l (実数列のことも多い)

長さ N の複素数列 F_k

フーリエ変換: 『長さ N の複素数の列 f_l 』を『長さ N の複素数列 F_k 』に変換する
逆フーリエ変換: 『長さ N の複素数の列 F_k 』を『長さ N の複素数列 f_l 』に変換する

※ f_l が実数の場合共役対称性『 $F_k = \overline{F_{N-k}}$ 』を持つ

※ わかりやすさのため長さ N としたが正確には周期 N

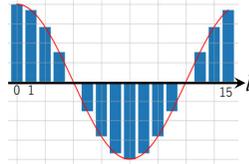
N=16として、逆フーリエ変換を根性で全項書き出すと、、、

$$\text{フーリエ変換 } F_k = \frac{1}{16} \sum_{l=0}^{15} f_l e^{-i2\pi l \frac{k}{16}}$$

$$\text{逆フーリエ変換 } f_l = \sum_{k=0}^{15} F_k e^{i2\pi k \frac{l}{16}}$$

$$f_l = F_0 e^{i2\pi 0 \frac{l}{16}} + F_1 e^{i2\pi 1 \frac{l}{16}} + F_2 e^{i2\pi 2 \frac{l}{16}} + F_3 e^{i2\pi 3 \frac{l}{16}} + F_4 e^{i2\pi 4 \frac{l}{16}} + F_5 e^{i2\pi 5 \frac{l}{16}} + F_6 e^{i2\pi 6 \frac{l}{16}} + F_7 e^{i2\pi 7 \frac{l}{16}} + F_8 e^{i2\pi 8 \frac{l}{16}} + F_9 e^{i2\pi 9 \frac{l}{16}} + F_{10} e^{i2\pi 10 \frac{l}{16}} + F_{11} e^{i2\pi 11 \frac{l}{16}} + F_{12} e^{i2\pi 12 \frac{l}{16}} + F_{13} e^{i2\pi 13 \frac{l}{16}} + F_{14} e^{i2\pi 14 \frac{l}{16}} + F_{15} e^{i2\pi 15 \frac{l}{16}}$$

$e^{i2\pi 1 \frac{l}{16}}$ の実部



lは 0~15まで動く添字

$e^{i2\pi 1 \frac{l}{16}}$ (の実部)は右のような離散的な正弦波となる

※ 赤曲線は連続関数 $e^{i2\pi 1 x}$ を可視化したもの
 ※ この離散的な正弦波を足し合わせて下のflを作る!

$F_1 e^{i2\pi 1 \frac{l}{16}}$ この部分は、
 複素数 F_1 をかけることで周波数1の離散的な正弦波の振幅と位相ずれを指定している

N=16として、逆フーリエ変換を根性で全項書き出すと、、、

$$\text{フーリエ変換 } F_k = \frac{1}{16} \sum_{l=0}^{15} f_l e^{-i2\pi l \frac{k}{16}}$$

$$\text{逆フーリエ変換 } f_l = \sum_{k=0}^{15} F_k e^{i2\pi k \frac{l}{16}}$$

$$f_l = F_0 e^{i2\pi 0 \frac{l}{16}} + F_1 e^{i2\pi 1 \frac{l}{16}} + F_2 e^{i2\pi 2 \frac{l}{16}} + F_3 e^{i2\pi 3 \frac{l}{16}} + F_4 e^{i2\pi 4 \frac{l}{16}} + F_5 e^{i2\pi 5 \frac{l}{16}} + F_6 e^{i2\pi 6 \frac{l}{16}} + F_7 e^{i2\pi 7 \frac{l}{16}} + F_8 e^{i2\pi 8 \frac{l}{16}} + F_9 e^{i2\pi 9 \frac{l}{16}} + F_{10} e^{i2\pi 10 \frac{l}{16}} + F_{11} e^{i2\pi 11 \frac{l}{16}} + F_{12} e^{i2\pi 12 \frac{l}{16}} + F_{13} e^{i2\pi 13 \frac{l}{16}} + F_{14} e^{i2\pi 14 \frac{l}{16}} + F_{15} e^{i2\pi 15 \frac{l}{16}}$$

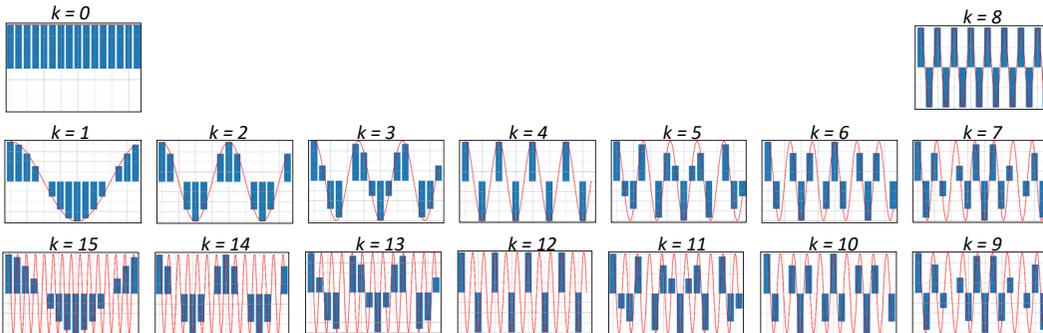


逆フーリエ変換全体は、、、
 周波数が整数倍の複数の正弦波を、
 F_k により振幅・位相を変化させて足すことで元の信号を復元している

フーリエ変換は、、、
 複数の正弦波を足す際に必要な、振幅・
 位相を変化させるための係数 F_k を計算している

N=16として、すべての正弦波 (の実部) を可視化してみると、、、

$$f_l = F_0 e^{i2\pi 0 \frac{l}{16}} + F_1 e^{i2\pi 1 \frac{l}{16}} + F_2 e^{i2\pi 2 \frac{l}{16}} + F_3 e^{i2\pi 3 \frac{l}{16}} + F_4 e^{i2\pi 4 \frac{l}{16}} + F_5 e^{i2\pi 5 \frac{l}{16}} + F_6 e^{i2\pi 6 \frac{l}{16}} + F_7 e^{i2\pi 7 \frac{l}{16}} + F_8 e^{i2\pi 8 \frac{l}{16}} + F_9 e^{i2\pi 9 \frac{l}{16}} + F_{10} e^{i2\pi 10 \frac{l}{16}} + F_{11} e^{i2\pi 11 \frac{l}{16}} + F_{12} e^{i2\pi 12 \frac{l}{16}} + F_{13} e^{i2\pi 13 \frac{l}{16}} + F_{14} e^{i2\pi 14 \frac{l}{16}} + F_{15} e^{i2\pi 15 \frac{l}{16}}$$



最も周波数が大きいのは、k=15ではなく、k=8のとき

実部は、k番目とN-k番目は同じ形になる (虚部は-1倍で同じ形に)

※周波数が大きくなると、1ステップで進む角度が大きくなり逆回転しているのと同じになる

離散フーリエ変換の計算例

$$\text{フーリエ変換 } F_k = \frac{1}{8} \sum_{l=0}^7 f_l e^{-i2\pi l \frac{k}{8}}$$

N=8 のときのフーリエ変換を根性で書き出してみる

$$F_0 = \frac{1}{8} (f_0 e^{-i2\pi 0 \frac{0}{8}} + f_1 e^{-i2\pi 1 \frac{0}{8}} + f_2 e^{-i2\pi 2 \frac{0}{8}} + f_3 e^{-i2\pi 3 \frac{0}{8}} + f_4 e^{-i2\pi 4 \frac{0}{8}} + f_5 e^{-i2\pi 5 \frac{0}{8}} + f_6 e^{-i2\pi 6 \frac{0}{8}} + f_7 e^{-i2\pi 7 \frac{0}{8}})$$

$$F_1 = \frac{1}{8} (f_0 e^{-i2\pi 0 \frac{1}{8}} + f_1 e^{-i2\pi 1 \frac{1}{8}} + f_2 e^{-i2\pi 2 \frac{1}{8}} + f_3 e^{-i2\pi 3 \frac{1}{8}} + f_4 e^{-i2\pi 4 \frac{1}{8}} + f_5 e^{-i2\pi 5 \frac{1}{8}} + f_6 e^{-i2\pi 6 \frac{1}{8}} + f_7 e^{-i2\pi 7 \frac{1}{8}})$$

$$F_2 = \frac{1}{8} (f_0 e^{-i2\pi 0 \frac{2}{8}} + f_1 e^{-i2\pi 1 \frac{2}{8}} + f_2 e^{-i2\pi 2 \frac{2}{8}} + f_3 e^{-i2\pi 3 \frac{2}{8}} + f_4 e^{-i2\pi 4 \frac{2}{8}} + f_5 e^{-i2\pi 5 \frac{2}{8}} + f_6 e^{-i2\pi 6 \frac{2}{8}} + f_7 e^{-i2\pi 7 \frac{2}{8}})$$

$$F_3 = \frac{1}{8} (f_0 e^{-i2\pi 0 \frac{3}{8}} + f_1 e^{-i2\pi 1 \frac{3}{8}} + f_2 e^{-i2\pi 2 \frac{3}{8}} + f_3 e^{-i2\pi 3 \frac{3}{8}} + f_4 e^{-i2\pi 4 \frac{3}{8}} + f_5 e^{-i2\pi 5 \frac{3}{8}} + f_6 e^{-i2\pi 6 \frac{3}{8}} + f_7 e^{-i2\pi 7 \frac{3}{8}})$$

$$F_4 = \frac{1}{8} (f_0 e^{-i2\pi 0 \frac{4}{8}} + f_1 e^{-i2\pi 1 \frac{4}{8}} + f_2 e^{-i2\pi 2 \frac{4}{8}} + f_3 e^{-i2\pi 3 \frac{4}{8}} + f_4 e^{-i2\pi 4 \frac{4}{8}} + f_5 e^{-i2\pi 5 \frac{4}{8}} + f_6 e^{-i2\pi 6 \frac{4}{8}} + f_7 e^{-i2\pi 7 \frac{4}{8}})$$

⋮

$s = e^{-i \frac{2\pi}{8}}$ とおくと。。。

離散フーリエ変換の計算例

$$\text{フーリエ変換 } F_k = \frac{1}{8} \sum_{l=0}^7 f_l e^{-i2\pi l \frac{k}{8}}$$

$N=8$ のときのフーリエ変換を根性で書き出してみる

$$F_0 = \frac{1}{8} (f_0 s^0 + f_1 s^0 + f_2 s^0 + f_3 s^0 + f_4 s^0 + f_5 s^0 + f_6 s^0 + f_7 s^0)$$

$$F_1 = \frac{1}{8} (f_0 s^0 + f_1 s^1 + f_2 s^2 + f_3 s^3 + f_4 s^4 + f_5 s^5 + f_6 s^6 + f_7 s^7)$$

$$F_2 = \frac{1}{8} (f_0 s^0 + f_1 s^2 + f_2 s^4 + f_3 s^6 + f_4 s^8 + f_5 s^{10} + f_6 s^{12} + f_7 s^{14})$$

$$F_3 = \frac{1}{8} (f_0 s^0 + f_1 s^3 + f_2 s^6 + f_3 s^9 + f_4 s^{12} + f_5 s^{15} + f_6 s^{18} + f_7 s^{21})$$

$$F_4 = \frac{1}{8} (f_0 s^0 + f_1 s^4 + f_2 s^8 + f_3 s^{12} + f_4 s^{16} + f_5 s^{20} + f_6 s^{24} + f_7 s^{28})$$

⋮

$$s = e^{-i\frac{2\pi}{8}}$$
 とおくと。。。

離散フーリエ変換の計算例

$$\text{フーリエ変換 } F_k = \frac{1}{8} \sum_{l=0}^7 f_l e^{-i2\pi l \frac{k}{8}}$$

$N=8$ のときのフーリエ変換を根性で書き出してみる

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} s^0 & s^0 \\ s^0 & s^1 & s^2 & s^3 & s^4 & s^5 & s^6 & s^7 \\ s^0 & s^2 & s^4 & s^6 & s^8 & s^{10} & s^{12} & s^{14} \\ s^0 & s^3 & s^6 & s^9 & s^{12} & s^{15} & s^{18} & s^{21} \\ s^0 & s^4 & s^8 & s^{12} & s^{16} & s^{20} & s^{24} & s^{28} \\ s^0 & s^5 & s^{10} & s^{15} & s^{20} & s^{25} & s^{30} & s^{35} \\ s^0 & s^6 & s^{12} & s^{18} & s^{24} & s^{30} & s^{36} & s^{42} \\ s^0 & s^7 & s^{14} & s^{21} & s^{28} & s^{35} & s^{42} & s^{49} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

8次元ベクトルに、8x8複素行列を左から掛ける形をしていることがわかる
離散フーリエ変換に必要なことは行列演算だけ

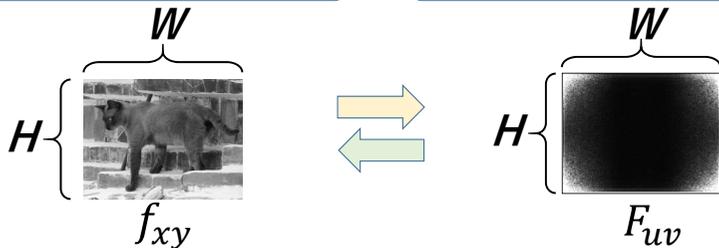
離散フーリエ変換 (2D)

フーリエ変換:

$$F_{uv} = \frac{1}{WH} \sum_{y=0}^{H-1} \sum_{x=0}^{W-1} f_{xy} e^{-\frac{2\pi x u}{W} i} e^{-\frac{2\pi y v}{H} i}$$

逆フーリエ変換:

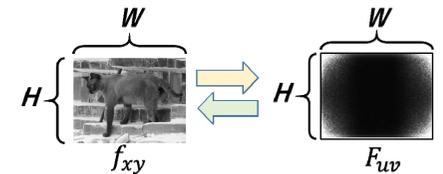
$$f_{xy} = \sum_{v=0}^{H-1} \sum_{u=0}^{W-1} F_{uv} e^{\frac{2\pi x u}{W} i} e^{\frac{2\pi y v}{H} i}$$



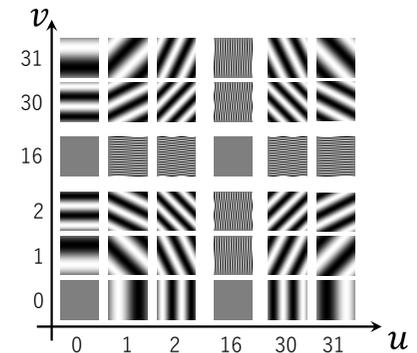
2次元に格子状に並んだサイズHxWの複素数データ f_{xy} を、
2次元に格子状に並んだサイズHxWの複素数データ F_{uv} に変換する
※ ただし、 f_{xy} は画像 (実数列) のことが多い

離散フーリエ変換 (2D)

$$\text{逆フーリエ変換: } f_{xy} = \sum_{v=0}^{31} \sum_{u=0}^{31} F_{uv} e^{2\pi i \frac{x}{32} u} e^{2\pi i \frac{y}{32} v}$$



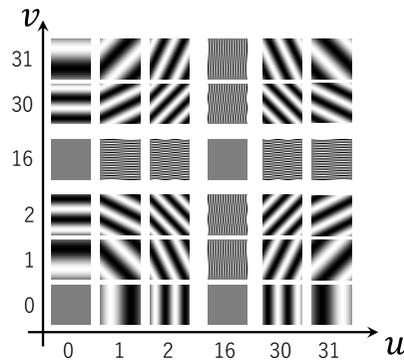
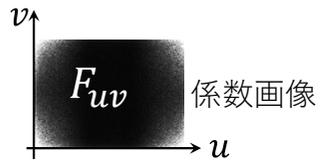
- 1Dのときの議論と同様に、 $W=H=32$ として逆フーリエ変換に注目する
- 元画像 f_{xy} は、 $I(x, y) = e^{2\pi i \frac{x}{32} u} e^{2\pi i \frac{y}{32} v}$ という正弦波画像の重ね合わせで表現可能
- この正弦波画像虚部を可視化したものが右図
 - 縦横斜め方向の正弦波が見られる
 - $u=16, v=16$ が一番高周波





$$f_{xy} = \sum_{v=0}^{H-1} \sum_{u=0}^{W-1} F_{uv} e^{i\left(\frac{2\pi xu}{W} + \frac{2\pi yv}{H}\right)}$$

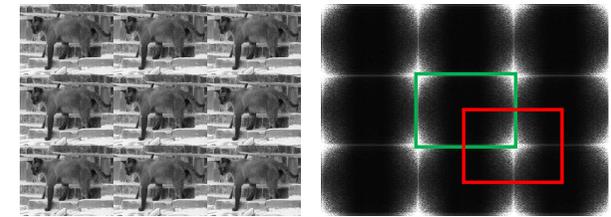
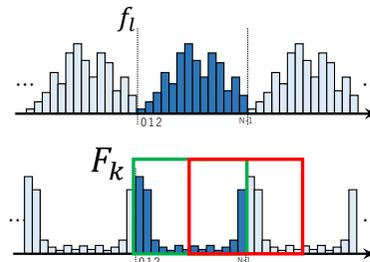
$$W=H=32\text{のときの} \sin\left(\frac{2\pi xu}{W} + \frac{2\pi yv}{H}\right)$$



$F_{u,v}$ は上の (u,v) 番目の画像の係数
実際は $e^{i\left(\frac{2\pi xu}{W} + \frac{2\pi yv}{H}\right)}$ は複素数画像

- $F_{0,0}$ は定数（直流成分）の係数
- $F_{u,v}$ は、画像区間において『縦に u 回・横に v 回振動する正弦波画像』の係数
- $u=v=N/2$ がもっとも高周波で、 $u=N-1$ は $u=1$ の正弦波と同じ周波数（位相は逆）

Shiftの話

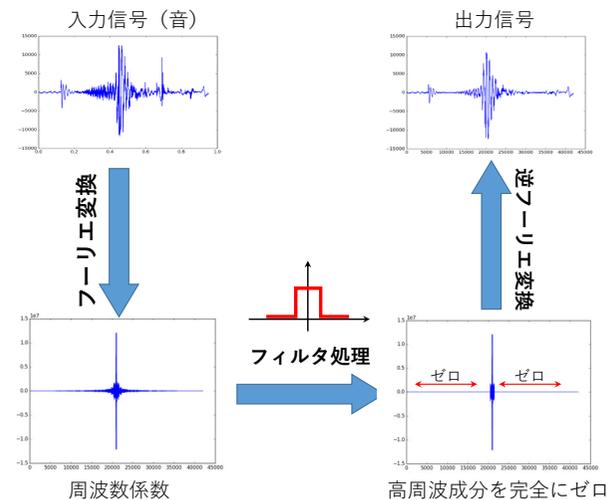


- 離散フーリエ変換を実装すると、**上図緑四角**のようにピークが端に来る変換結果になる → これは間違いではない
- 説明を省略したが、離散フーリエ変換では同じ信号が周期 N で繰り返すと仮定
 - 変換前・変換後の信号は上図の通り繰り返すものと仮定する
- 低周波成分を中心に配置したほうが理解しやすいので、場所をずらして **上図赤四角**の位置を出力することが多い
 - このshiftを行なう関数が用意されていることも → `np.fft.ifftshift()`

Contents

- 離散フーリエ変換の概要
- 離散フーリエ変換
- 周波数フィルタリング

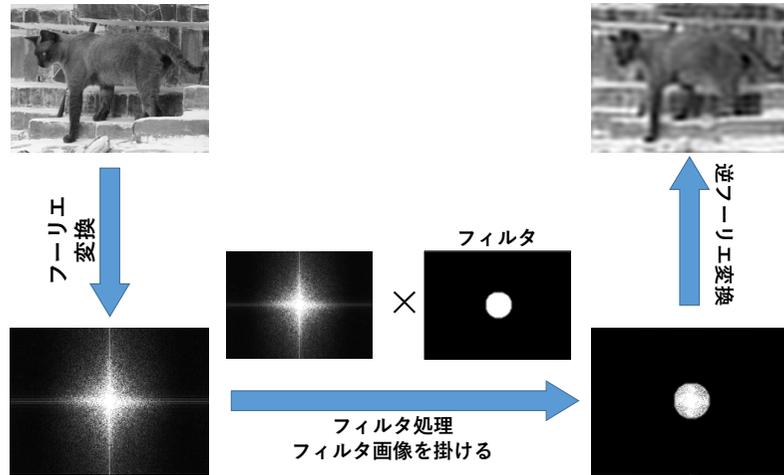
周波数フィルタリング（音）



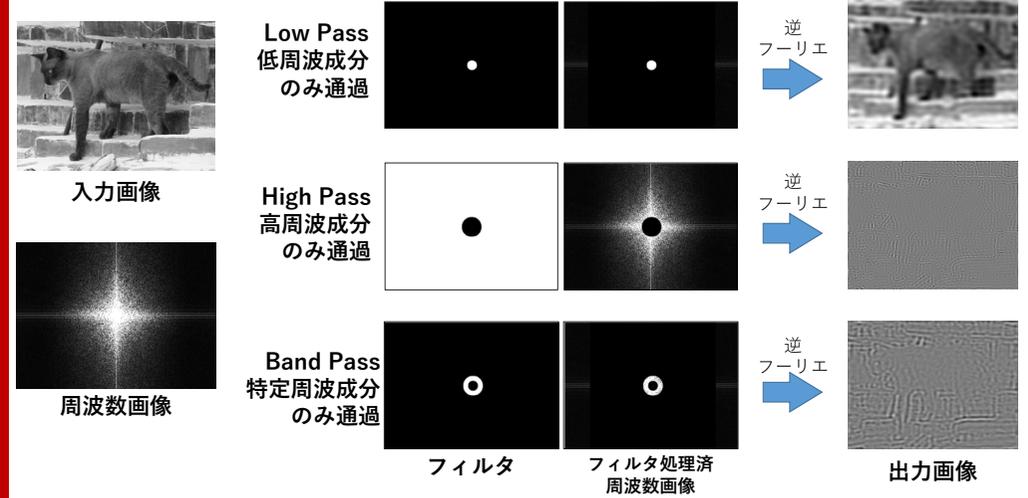
- フーリエ変換により周波数を考慮したfilterが設計できる
1. フーリエ変換し
 2. 周波数空間でフィルタを掛け
 3. 逆フーリエ変換

さっきのスライドです！

周波数フィルタリング (画像)



周波数フィルタリング (画像)



Contents

- フーリエ変換の概要
- 離散フーリエ変換
- 周波数フィルタリング

高速フーリエ変換 - Fast Fourier Transform
(の簡単な説明)

離散フーリエ変換の計算例

再掲

$$\text{フーリエ変換 } F_k = \frac{1}{8} \sum_{l=0}^7 f_l e^{-i2\pi l \frac{k}{8}}$$

N=8 のときのフーリエ変換を根性で書き出してみる

$$F_0 = \frac{1}{8} (f_0 e^{-i2\pi 0 \frac{0}{8}} + f_1 e^{-i2\pi 1 \frac{0}{8}} + f_2 e^{-i2\pi 2 \frac{0}{8}} + f_3 e^{-i2\pi 3 \frac{0}{8}} + f_4 e^{-i2\pi 4 \frac{0}{8}} + f_5 e^{-i2\pi 5 \frac{0}{8}} + f_6 e^{-i2\pi 6 \frac{0}{8}} + f_7 e^{-i2\pi 7 \frac{0}{8}})$$

$$F_1 = \frac{1}{8} (f_0 e^{-i2\pi 0 \frac{1}{8}} + f_1 e^{-i2\pi 1 \frac{1}{8}} + f_2 e^{-i2\pi 2 \frac{1}{8}} + f_3 e^{-i2\pi 3 \frac{1}{8}} + f_4 e^{-i2\pi 4 \frac{1}{8}} + f_5 e^{-i2\pi 5 \frac{1}{8}} + f_6 e^{-i2\pi 6 \frac{1}{8}} + f_7 e^{-i2\pi 7 \frac{1}{8}})$$

$$F_2 = \frac{1}{8} (f_0 e^{-i2\pi 0 \frac{2}{8}} + f_1 e^{-i2\pi 1 \frac{2}{8}} + f_2 e^{-i2\pi 2 \frac{2}{8}} + f_3 e^{-i2\pi 3 \frac{2}{8}} + f_4 e^{-i2\pi 4 \frac{2}{8}} + f_5 e^{-i2\pi 5 \frac{2}{8}} + f_6 e^{-i2\pi 6 \frac{2}{8}} + f_7 e^{-i2\pi 7 \frac{2}{8}})$$

$$F_3 = \frac{1}{8} (f_0 e^{-i2\pi 0 \frac{3}{8}} + f_1 e^{-i2\pi 1 \frac{3}{8}} + f_2 e^{-i2\pi 2 \frac{3}{8}} + f_3 e^{-i2\pi 3 \frac{3}{8}} + f_4 e^{-i2\pi 4 \frac{3}{8}} + f_5 e^{-i2\pi 5 \frac{3}{8}} + f_6 e^{-i2\pi 6 \frac{3}{8}} + f_7 e^{-i2\pi 7 \frac{3}{8}})$$

$$F_4 = \frac{1}{8} (f_0 e^{-i2\pi 0 \frac{4}{8}} + f_1 e^{-i2\pi 1 \frac{4}{8}} + f_2 e^{-i2\pi 2 \frac{4}{8}} + f_3 e^{-i2\pi 3 \frac{4}{8}} + f_4 e^{-i2\pi 4 \frac{4}{8}} + f_5 e^{-i2\pi 5 \frac{4}{8}} + f_6 e^{-i2\pi 6 \frac{4}{8}} + f_7 e^{-i2\pi 7 \frac{4}{8}})$$

⋮

$$s = e^{-i\frac{2\pi}{8}} \text{ とおくと。。。。}$$

離散フーリエ変換の計算例

再掲

$$\text{フーリエ変換 } F_k = \frac{1}{8} \sum_{l=0}^7 f_l e^{-i2\pi l \frac{k}{8}}$$

N=8 のときのフーリエ変換を根性で書き出してみる

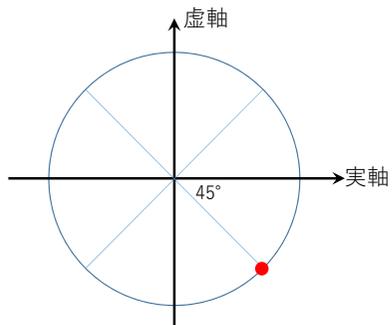
$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} s^0 & s^0 \\ s^0 & s^1 & s^2 & s^3 & s^4 & s^5 & s^6 & s^7 \\ s^0 & s^2 & s^4 & s^6 & s^8 & s^{10} & s^{12} & s^{14} \\ s^0 & s^3 & s^6 & s^9 & s^{12} & s^{15} & s^{18} & s^{21} \\ s^0 & s^4 & s^8 & s^{12} & s^{16} & s^{20} & s^{24} & s^{28} \\ s^0 & s^5 & s^{10} & s^{15} & s^{20} & s^{25} & s^{30} & s^{35} \\ s^0 & s^6 & s^{12} & s^{18} & s^{24} & s^{30} & s^{36} & s^{42} \\ s^0 & s^7 & s^{14} & s^{21} & s^{28} & s^{35} & s^{42} & s^{49} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

$$s = e^{-i\frac{2\pi}{8}}$$

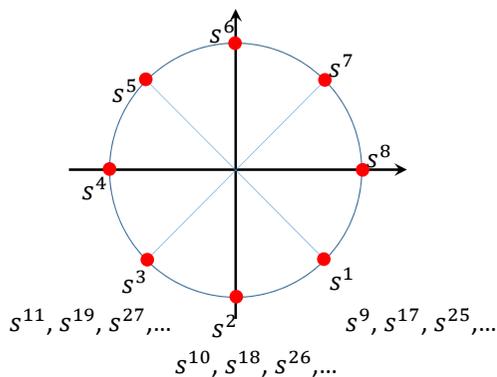
これが単純な離散フーリエ変換 (DFT)
行列とベクトルの積の計算には O(N^2) の計算が必要

$s = e^{-i\frac{2\pi}{8}}$ この s は複素平面では以下の座標に対応

$s^1, s^2, s^3, s^4, \dots$ は以下の場所に対応



$$e^{-i\frac{2\pi}{8}} = \cos - \frac{2\pi}{8} + i \sin - \frac{2\pi}{8}$$



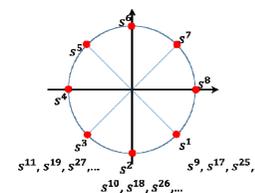
$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} s^0 & s^0 \\ s^0 & s^1 & s^2 & s^3 & s^4 & s^5 & s^6 & s^7 \\ s^0 & s^2 & s^4 & s^6 & s^8 & s^{10} & s^{12} & s^{14} \\ s^0 & s^3 & s^6 & s^9 & s^{12} & s^{15} & s^{18} & s^{21} \\ s^0 & s^4 & s^8 & s^{12} & s^{16} & s^{20} & s^{24} & s^{28} \\ s^0 & s^5 & s^{10} & s^{15} & s^{20} & s^{25} & s^{30} & s^{35} \\ s^0 & s^6 & s^{12} & s^{18} & s^{24} & s^{30} & s^{36} & s^{42} \\ s^0 & s^7 & s^{14} & s^{21} & s^{28} & s^{35} & s^{42} & s^{49} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} s^0 & s^0 \\ s^0 & s^1 & s^2 & s^3 & s^4 & s^5 & s^6 & s^7 \\ s^0 & s^2 & s^4 & s^6 & s^8 & s^{10} & s^{12} & s^{14} \\ s^0 & s^3 & s^6 & s^9 & s^{12} & s^{15} & s^{18} & s^{21} \\ s^0 & s^4 & s^8 & s^{12} & s^{16} & s^{20} & s^{24} & s^{28} \\ s^0 & s^5 & s^{10} & s^{15} & s^{20} & s^{25} & s^{30} & s^{35} \\ s^0 & s^6 & s^{12} & s^{18} & s^{24} & s^{30} & s^{36} & s^{42} \\ s^0 & s^7 & s^{14} & s^{21} & s^{28} & s^{35} & s^{42} & s^{49} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

s は $s^{k+8n} = s^k$ を満たすので

$s^1, s^2, s^3, s^4, \dots$ は以下の場所に対応



乗数が7以下になるよう変形
なんか繰り返しが見える...

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & s^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & s^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^0 & s^0 & s^0 & s^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^0 & s^4 & s^2 & s^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^0 & s^0 & s^4 & s^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^0 & s^4 & s^6 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_4 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_5 \\ f_3 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

この黄・青部分の繰り返しに着目して変形

$$\begin{pmatrix} s^0 & s^0 \\ s^2 & s^6 \\ s^4 & s^4 \\ s^6 & s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^0 & (s^0 & s^0) \\ & s^2 & (s^0 & s^4) \\ & s^4 & (s^0 & s^0) \\ & s^6 & (s^0 & s^4) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & s^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & s^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & s^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & s^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^0 & s^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^0 & s^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^0 & s^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^0 & s^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^0 & s^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s^0 & s^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s^0 & s^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s^0 & s^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_4 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_5 \\ f_3 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

$s^0 = 1, s^4 = -1$ に 着目して更に変形すると、

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -s^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -s^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_4 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_5 \\ f_3 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

1 x 8 回 1 x 8 回 1 x 8 回

疎行列 (ほとんどの要素がゼロの行列) の積に変換できた

行列xベクトル 演算では,

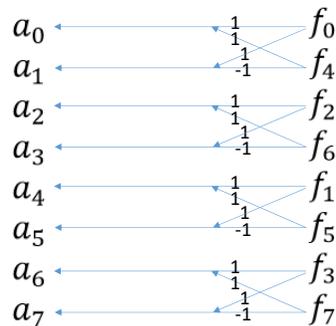
『ベクトルから2個選び、片方をそのまま、もう片方に s^k をかけて足す』

必要な足し算の数は上図の通り

→ 8 x 3 回 『O(N log N)』 で計算できる

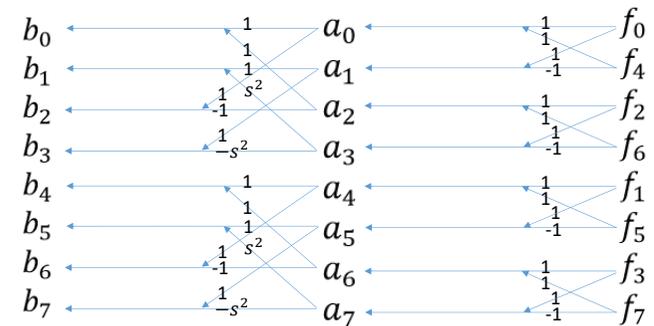
$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -s^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -s^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_4 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_5 \\ f_3 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

ここに着目



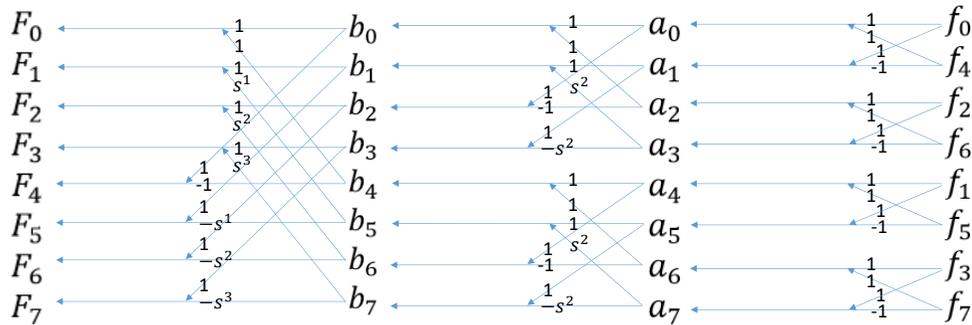
$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -s^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -s^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_4 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_5 \\ f_3 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

ここに着目



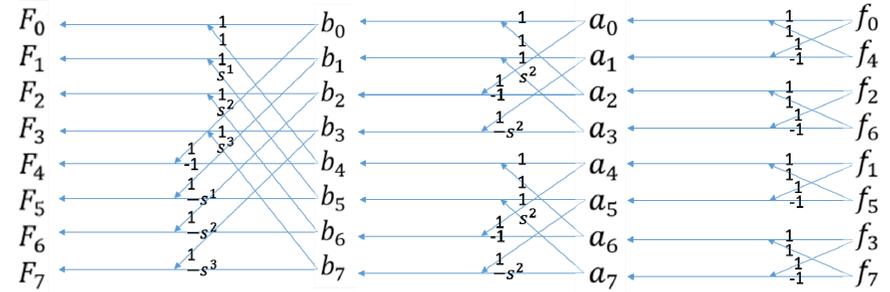
$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -s^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -s^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_4 \\ f_2 \\ f_6 \\ f_1 \\ f_5 \\ f_3 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

ここに注目



まとめ：高速フーリエ変換

- 離散フーリエ変換 $O(N^2)$ の冗長な計算に着目した高速化手法
- 計算複雑度は $O(N \log N)$
- 要素数 N が2のべき乗のときに利用可能
- 下図はバタフライ演算と呼ばれる



以下参考資料

フーリエ級数（の簡単な解説）

注意)

本講義では、フーリエ変換の意味的な理解と画像処理応用に重点を置きます。証明と導出の詳細は、信号処理の講義をとるか「[金谷健一:これなら分かる応用数学教室](#)」を参照してください。

練習

三角関数を合成せよ

$$a \sin \theta + b \cos \theta$$

n と m を非負整数として以下を計算せよ

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi n}{T} x \cos \frac{2\pi m}{T} x dx$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi n}{T} x \sin \frac{2\pi m}{T} x dx$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi n}{T} x \cos \frac{2\pi m}{T} x dx$$

(1) $\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi n}{T} x \cos \frac{2\pi m}{T} x dx$
 $= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{\sin \frac{2\pi x}{T} (n+m)}_{\frac{\cancel{A}}{0}} + \underbrace{\sin \frac{2\pi x}{T} (n-m)}_{\frac{\cancel{A}}{1}} dx = 0$

(2) $\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi n}{T} x \sin \frac{2\pi m}{T} x dx$
 $= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} -\cos \frac{2\pi x}{T} (n+m) + \cos \frac{2\pi x}{T} (n-m) dx$
 $= \frac{1}{2} \frac{T}{2\pi} \left[\frac{-1}{n+m} \sin \frac{2\pi x}{T} (n+m) + \frac{1}{n-m} \sin \frac{2\pi x}{T} (n-m) \right]_{-T/2}^{T/2} = 0$

$n = m$ のとき
 $= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} -\cos \frac{2\pi x}{T} (n+n) + 1 dx$
 $= \frac{1}{2} [x]_{-T/2}^{T/2} = \frac{T}{2}$

(3) $\int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi n}{T} x \cos \frac{2\pi m}{T} x dx$
 $= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi x}{T} (n+m) + \cos \frac{2\pi x}{T} (n-m) dx$

$n \neq m$ のとき

$$= \frac{1}{2} \frac{T}{2\pi} \left[\frac{1}{n+m} \sin \frac{2\pi x}{T} (n+m) + \frac{1}{n-m} \sin \frac{2\pi x}{T} (n-m) \right]_{-T/2}^{T/2} = 0$$

$n = m$ のとき

$$= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi x}{T} (n+n) + 1 dx = \frac{T}{2}$$

練習

三角関数を合成せよ

$$a \sin \theta + b \cos \theta$$

n と m を非負整数として以下を計算せよ

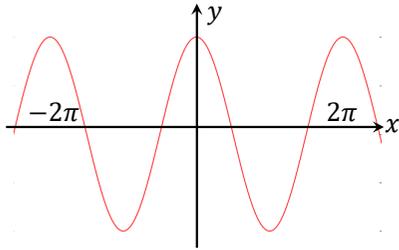
$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi n}{T} x \cos \frac{2\pi m}{T} x dx = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi n}{T} x \sin \frac{2\pi m}{T} x dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \end{cases}$$

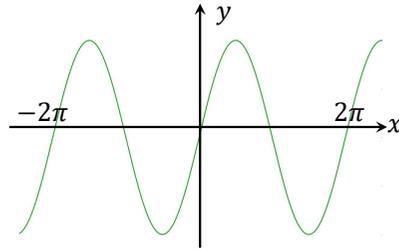
$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi n}{T} x \cos \frac{2\pi m}{T} x dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{T}{2}, & m = n \end{cases}$$

三角関数

$$y = \cos x$$



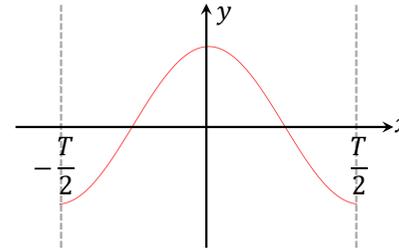
$$y = \sin x$$



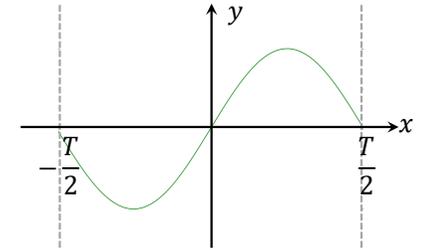
まあこれはいいですね

三角関数

$$y = \cos \frac{2\pi}{T} x = \cos \omega_0 x$$



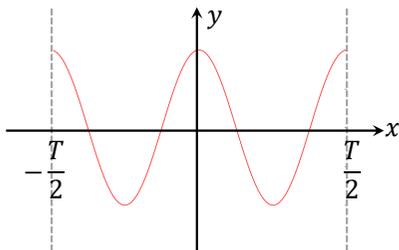
$$y = \sin \frac{2\pi}{T} x = \sin \omega_0 x$$



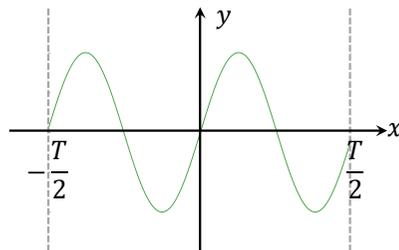
T を周期, ω_0 を基本(角)周波数と呼びます
[-T/2, T/2]でひと周期の波を取得できました

三角関数

$$y = \cos 2\omega_0 x$$



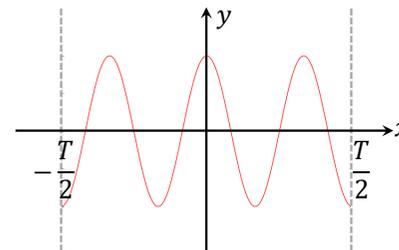
$$y = \sin 2\omega_0 x$$



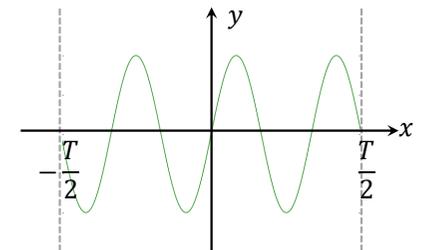
三角関数の引数を2倍すると、周波数が2倍に、周期が1/2倍になります

三角関数

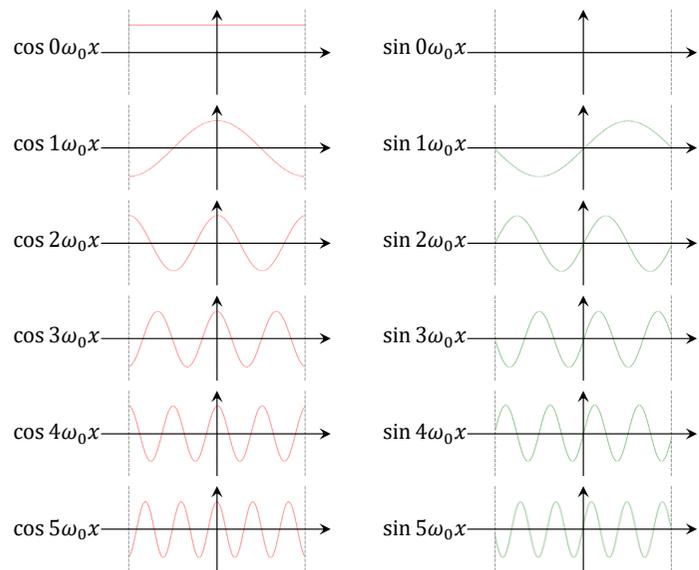
$$y = \cos 3\omega_0 x$$



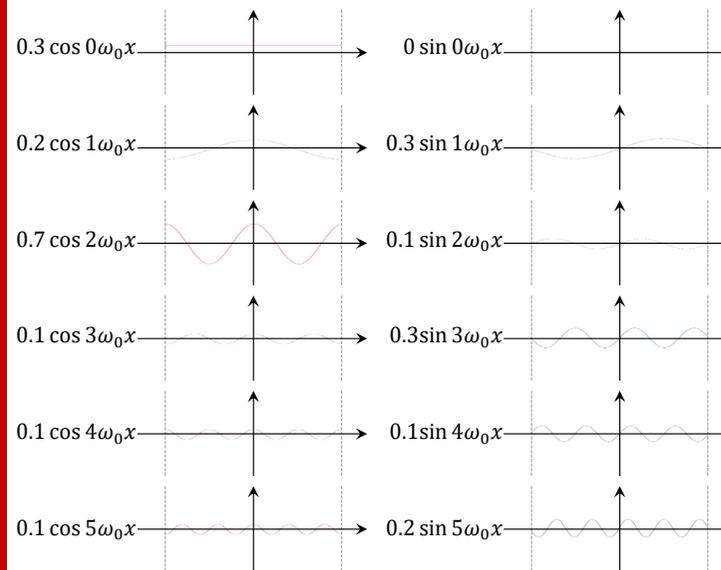
$$y = \sin 3\omega_0 x$$



三角関数の引数を3倍すると、周波数が3倍に、周期が1/3倍になります



こんな感じで基本周波数の整数倍の波を考える

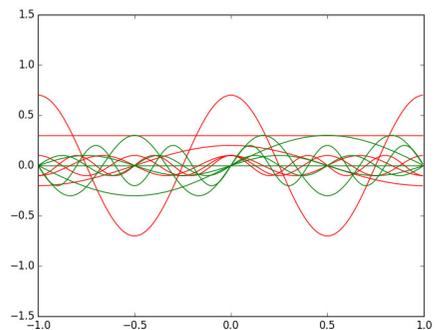


こんな感じで基本周波数の整数倍の波を考える

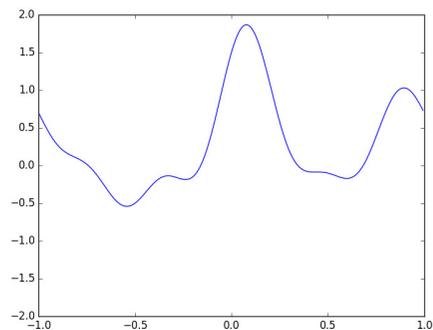
それぞれを定数倍する (今回はランダムに)

で、それを全部足し合わせてみる

$$0.3 \cos 0\omega_0 x + 0.2 \cos 1\omega_0 x + 0.7 \cos 2\omega_0 x + 0.1 \cos 3\omega_0 x + 0.1 \cos 4\omega_0 x + 0.1 \cos 5\omega_0 x + 0.0 \sin 0\omega_0 x + 0.3 \sin 1\omega_0 x + 0.1 \sin 2\omega_0 x + 0.3 \sin 3\omega_0 x + 0.1 \sin 4\omega_0 x + 0.2 \sin 5\omega_0 x$$



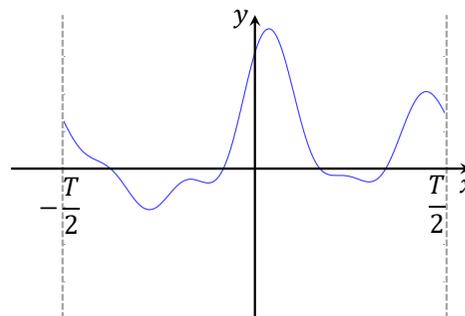
和



フーリエ級数のとても簡単 (雑) な説明

$[-T/2, T/2]$ の周期関数 f は、周波数 $k\omega_0$ ($k=0,1,2,\dots$)の三角関数の重ね合わせで表現できる (証明など詳細は信号処理の講義へ)

周期関数を受け取ると、この周期関数から重ね合わせに必要な各関数の係数を推定できる (どうやって?)



➡

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 0.3 $\cos 0\omega_0 x$ | 0.0 $\sin 0\omega_0 x$ |
| 0.2 $\cos 1\omega_0 x$ | 0.3 $\sin 1\omega_0 x$ |
| 0.7 $\cos 2\omega_0 x$ | 0.1 $\sin 2\omega_0 x$ |
| 0.1 $\cos 3\omega_0 x$ | 0.3 $\sin 3\omega_0 x$ |
| 0.1 $\cos 4\omega_0 x$ | 0.1 $\sin 4\omega_0 x$ |
| 0.1 $\cos 5\omega_0 x$ | 0.2 $\sin 5\omega_0 x$ |

『この元信号の中には、 $\cos 2\omega_0 x$ の成分が0.7だけ含まれている』というのが分かる

フーリエ級数のとても簡単な説明

合成後の周期関数 $f(x)$ を受け取ると、この合成後の波から合成前の各関数の係数を推定する ←どうやって??

例 $\cos 2\omega_0 x$ の係数を知りたい場合…

1) $f(x)$ に $\cos 2\omega_0 x$ を掛けた関数を作る

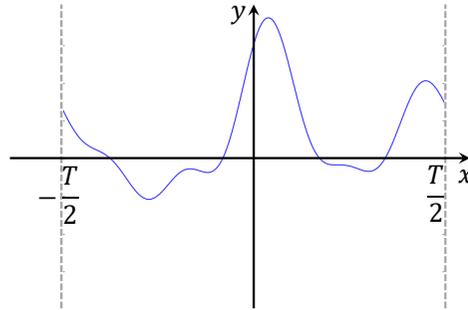
$$f(x) \cos 2\omega_0 x$$

2) 係数 $\frac{2}{T}$ もかける

$$\frac{2}{T} f(x) \cos 2\omega_0 x$$

3) これを周期分だけ積分すると係数が得られる

$$\text{係数} = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos 2\omega_0 t dt$$



フーリエ級数

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、

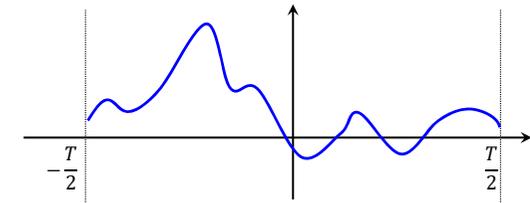
フーリエ級数で表現できる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} : \text{基本周波数}$$



※天下一りの説明で済みません。ここではそういう事実があると知っておいてください。

※詳細な導出と証明は、信号処理の講義、または、『これなら分かる応用数学教室（金谷健一著）』を参照

フーリエ級数

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、

フーリエ級数で表現できる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2}$$

$$+ a_1 \cos 1\omega_0 t + b_1 \sin 1\omega_0 t$$

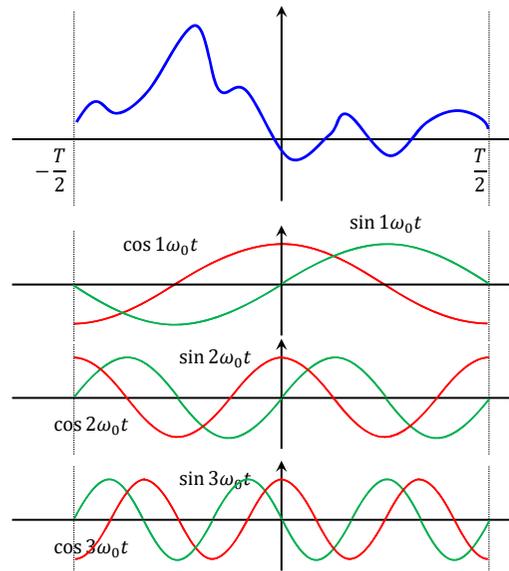
$$+ a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t$$

$$+ a_3 \cos 3\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t$$

$$+ \dots$$

基本周波数

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



フーリエ級数

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、

フーリエ級数で表現できる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2}$$

$$+ a'_1 \sin(1\omega_0 t + \phi_1)$$

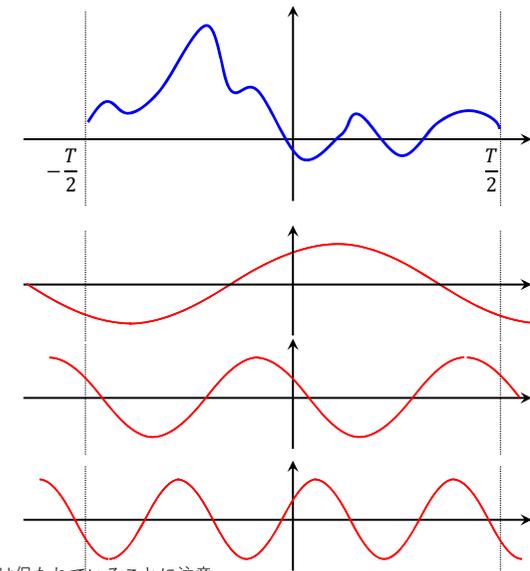
$$+ a'_2 \sin(2\omega_0 t + \phi_2)$$

$$+ a'_3 \sin(3\omega_0 t + \phi_3)$$

$$+ \dots$$

「sin と cos の振幅を変えて足す」とも思えるが、「 a_k と b_k で振幅と位相ずれを制御する」とも見てもよい

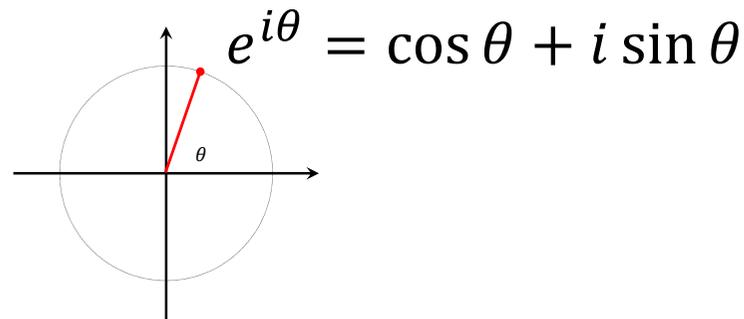
位相がずれても、 $-\frac{T}{2}$ と $\frac{T}{2}$ における位置は同じなので、周期性は保たれていることに注意



Contents

- フーリエ変換の概要
- フーリエ級数
- **オイラーの式と複素数表現**
- 離散フーリエ変換
- 周波数フィルタリング

オイラーの式



$e^{i\theta}$ はガウス平面における単位円に乗る

練習) 複素数の積を求めよ

• $a(\cos \theta + i \sin \theta) * b(\cos \phi + i \sin \phi)$

以下の関係を証明せよ

• $e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$

• $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

• $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

• $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

フーリエ級数の複素数表現

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、フーリエ級数で表現できる。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$: 基本周波数

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

練習: 下の式(1)-(5)より, 式(6),(7)を導け

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t) \dots (1)$$

$$a_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt \dots (2)$$

$$b_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt \dots (3)$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \dots (4)$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \dots (5)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t} \dots (6)$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \dots (7)$$

以下のフーリエ級数展開が成り立つものとする,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t) \dots (1)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt \dots (2)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt \dots (3)$$

一方オイラーの式より,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \dots (4)$$

が得られる.

式(4)を式(1)へ代入し整理すると,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t}}{2} + b_k \frac{e^{ik\omega_0 t} - e^{-ik\omega_0 t}}{2i} \right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k (e^{ik\omega_0 t} + e^{-ik\omega_0 t}) - ib_k (e^{ik\omega_0 t} - e^{-ik\omega_0 t}))$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} ((a_k - ib_k) e^{ik\omega_0 t} + b_k (a_k + ib_k) e^{-ik\omega_0 t})$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t} \dots (5)$$

ただし,

$$C_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & k < 0 \end{cases} \dots (6)$$

と置いた.

また, 式(6)に式(2)(3)を代入し整理すると,

$$\frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt - i \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega_0 t - i \sin k\omega_0 t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \dots (7)$$

$$\frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos -k\omega_0 t dt + i \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin -k\omega_0 t dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega_0 t - i \sin k\omega_0 t) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \dots (8)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i0\omega_0 t} dt \dots (9)$$

上記(5,6,7,8,9)より,

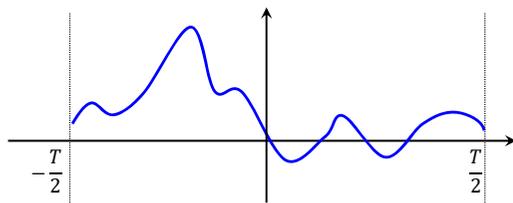
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t},$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \dots (10)$$

フーリエ級数展開の複素数表現が得られる.

フーリエ級数(複素数表記)

区間 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上の連続関数 $f(t)$ は、
フーリエ級数で表現できる.



$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}$$

(ここでもこれまでと同じだけど) 大切なのは、元の関数が基本周波数の整数倍の正弦波の重ね合わせで表現できること

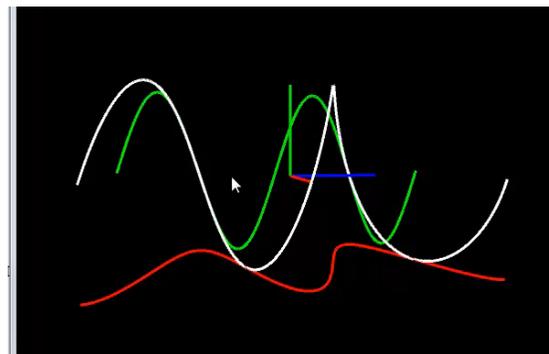
この複素数表記された正弦波を重ね合せていることは分かるんだけど、 $\cos k\omega_0 t, \sin k\omega_0 t$ に比べてイメージしにくい

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

フーリエ級数(複素数表記)

$$e^{ik\omega_0 t} = \cos k\omega_0 t + i \sin k\omega_0 t$$

この正弦波は何なのか?



赤が実軸
緑が虚軸
青が時間軸

※今回は導出と証明を省きました
詳しく知りたい人は教科書参照

まとめ: フーリエ級数

- フーリエ級数: 周期 T を持つ関数は下記の通り正弦波の重ね合わせで表現可

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k\omega_0 t + b_n \sin k\omega_0 t), \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega_0 t dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega_0 t dt$$

- オイラーの式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

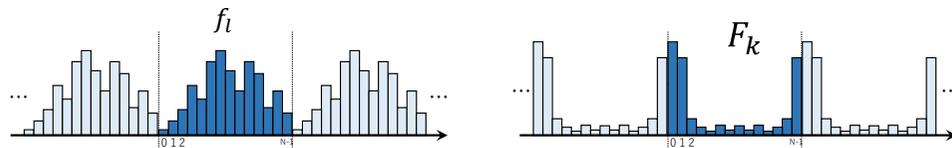
$$e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}, \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

- フーリエ級数 (複素数表現):

上式にオイラーの式を代入すると以下のように変形できる

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t}, \quad C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega_0 t} dt$$

離散フーリエ変換 (1D)



入力: 周期 N の複素数列 f_l (実数列のことも多い)

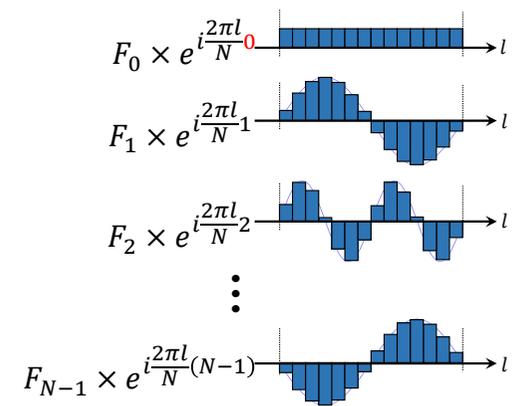
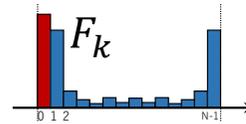
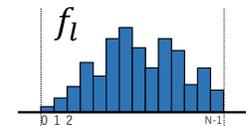
出力: 周期 N の複素数列 F_k

$$\text{フーリエ変換} \quad F_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i\frac{2\pi kl}{N}} \quad \text{逆フーリエ変換} \quad f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i\frac{2\pi kl}{N}}$$

フーリエ変換『周期 N の離散値 f_l 』を『周期 N の離散値 F_k 』に変換する

F_k : k 番目の周波数係数: 入力信号に含まれる k 番目の正弦波 $e^{i\frac{2\pi kl}{N}}$ の大きさと位相ずれを表す

$$f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i\frac{2\pi kl}{N}}$$

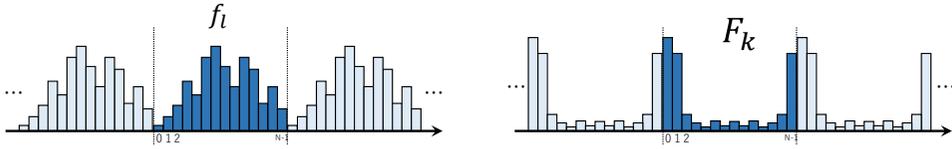


※グラフは全て複素数

- F_0 は定数 (直流成分) に対応
- F_k は $[0, N-1]$ 区間において k 回振動する正弦波に対応
- $k=N/2$ がもっとも高周波で, $k=N-1$ は $k=1$ の正弦波と同じ周波数 (位相は逆)

離散フーリエ変換 (1D)

$$\text{フーリエ変換 } F_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l \left(\cos \frac{2\pi kl}{N} - i \sin \frac{2\pi kl}{N} \right) \quad \text{逆フーリエ変換 } f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k \left(\cos \frac{2\pi kl}{N} + i \sin \frac{2\pi kl}{N} \right)$$



- 周期 N の離散値 f_l を周期 N の離散値 F_k に変換する
- f_l と F_k は複素数 (ただし f_l は実数列のことが多い)
- f_l が実数の場合 $F_k = \overline{F_{-k}}$ が成り立つ ($F_{-k} = F_{N-k}$)