

デジタルメディア処理2

担当: 井尻 敬

デジタルメディア処理2、2017（前期）

4/13	デジタル画像とは	: イントロダクション
4/20	フィルタ処理1	: 画素ごとの濃淡変換、線形フィルタ、非線形フィルタ
4/27	フィルタ処理2	: フーリエ変換、ローパスフィルタ、ハイパスフィルタ
5/11	画像の幾何変換1	: (フーリエ級数展開の復習) アフィン変換
5/18	画像の幾何変換2	: 画像の補間、イメージモザイク
5/25	画像領域分割	: 領域拡張法、動的輪郭モデル、グラフカット法
6/01	前半のまとめ (約30分)と中間試験 (約70分)	
6/08	特徴検出1	: テンプレートマッチング、コーナー・エッジ検出
6/15	特徴検出2	: DoG特徴量、SIFT特徴量、ハフ変換
6/22	画像認識1	: パターン認識概論、サポートベクタマシン
6/29	画像認識2	: ニューラルネットワーク、深層学習
7/06	画像処理演習	: ImageJを使った画像処理
7/13	画像処理演習	: Pythonプログラミング
7/20	後半のまとめ (約30分)と期末試験 (約70分)	

Contents

- 行列とベクトルの復習
- 線形変換（拡大・縮小 / 回転 / 鏡映 / せん断 / 合成）
- アフィン変換（平行移動 / 同次座標系）

表記について

- スカラー変数はイタリック体 : a, b, c
- ベクトルは小文字ボールド体 : $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$
- 行列は大文字ボールド体 : $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$
- \mathcal{R} を利用して次元を明確に : $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^3, \mathbf{A} \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$
- 右肩 T は転置を表す : $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{a}^T = (x \ y)$
 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

CG分野の論文ではよく見かける表記ですが、どの分野もこれというわけではないので注意してください。

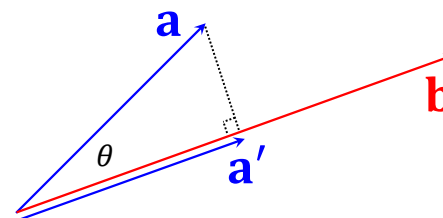
線形代数の復習(1)

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ のとき以下の計算をせよ

- (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
- (2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
- (3) $\|\mathbf{a}\|$

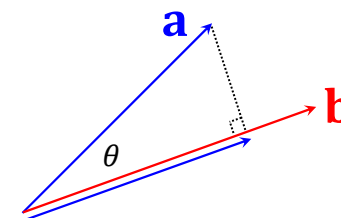
内積の意味

$|\mathbf{b}| = 1$ のとき



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

ベクトル \mathbf{a} をベクトル \mathbf{b} に射影し
両者の長さを掛け合わせたもの

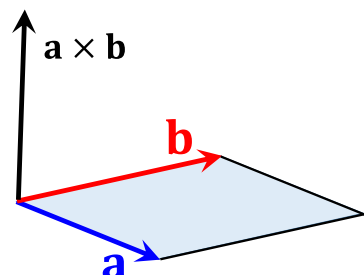


$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cos \theta$$

ベクトル \mathbf{a} をベクトル \mathbf{b} に射影した長さ

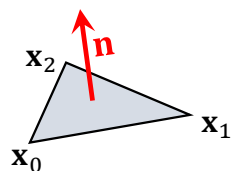
外積の意味

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$



二つのベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} に直交するベクトルを返す
長さはベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} が作る平行四辺形の面積

よくある応用：
三角形ポリゴンの法線・面積計算



$$\text{法線: } \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}{|(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)|}$$

$$\text{面積: } S = \frac{1}{2} |(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)|$$

線形代数の復習(2)

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき以下の計算をせよ

- (1) $\mathbf{A}\mathbf{a}$
- (2) $\mathbf{a}^T \mathbf{A}$
- (3) $\mathbf{A}\mathbf{B}$
- (4) \mathbf{A} の行列式 $|\mathbf{A}|$ を求めよ

線形代数の復習(3)

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ

線形代数の復習(4)

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を対角化せよ

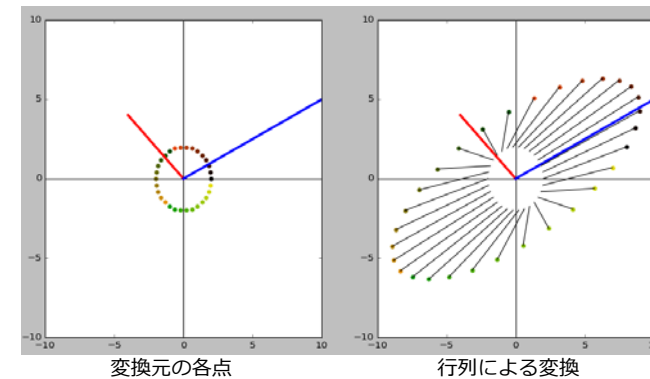
線形代数の復習(5)

- 行列の対角化は、様々なところで利用する大切な概念
 - ベキ乗の高速計算 \mathbf{A}^{30}
 - 極分解の $\sqrt{\mathbf{A}}$
- 行列はいつも対角化できるわけではない
 - 『 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が n 本の線形独立な固有ベクトルを持つとき、 \mathbf{A} は対角化可能』: \mathbf{A} の持つ n 個の固有値がすべて異なれば、 n 本の線形独立な固有ベクトルが存在するので対角化可能。
 - 固有値が重複する (固有多項式が重解を持つ) 場合に、対角化できないことがある。

例) 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化せよ

固有値・固有ベクトルの意味

EigenVector.py

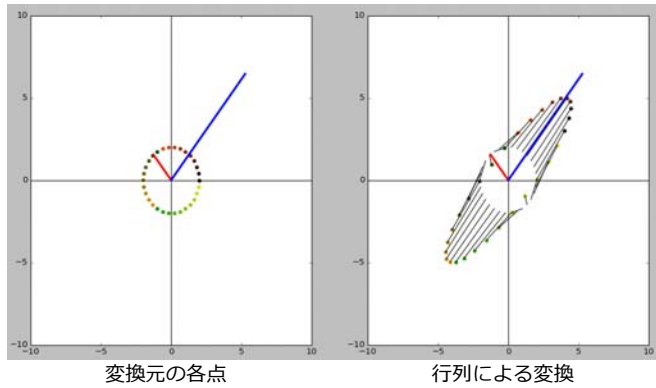


$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
固有値・固有ベクトル
 $2, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, 5, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

赤線・青線は固有ベクトル
黒線は変換による移動を示す

円周上の点群を変換すると楕円上に乗る
楕円の主軸と固有ベクトルは一致しない (一致するのは特殊な場合)
固有ベクトル上の点は、変換後も固有ベクトル上に乗る

固有値・固有ベクトルの意味



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & 2 \end{pmatrix}$$

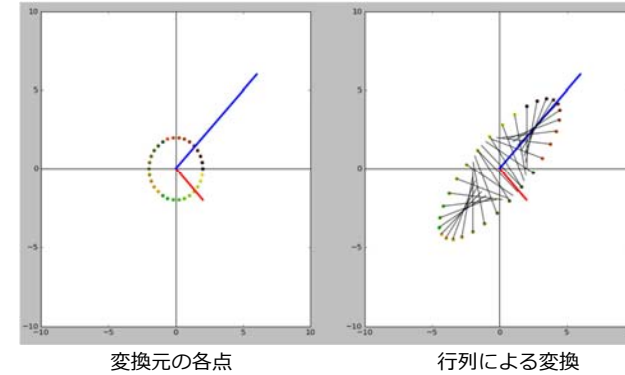
固有値・固有ベクトル

$$-\frac{\sqrt{6}+4}{2}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}+4}{2}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

赤線・青線は固有ベクトル
黒線は変換による移動を示す

円周上の点群を変換すると楕円上に乗る
楕円の主軸と固有ベクトルは一致しない（一致するのは特殊な場合）
固有ベクトル上の点は、変換後も固有ベクトル上に乗る

固有値・固有ベクトルの意味



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

固有値・固有ベクトル

$$-1, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, 3, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

赤線・青線は固有ベクトル
黒線は変換による移動を示す

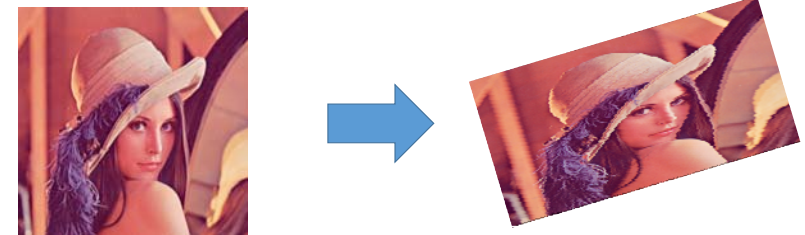
固有ベクトル上の点は、変換後も固有ベクトル上に乗る
対称行列の固有ベクトルは互いに直行する
対称行列による変換では、**楕円の主軸と固有ベクトルが一致**
固有値が負なので固有ベクトルに対して鏡面変換が起こっている

まとめ：ベクトルと行列の復習

- 画像処理（とCG）に頻出する行列・ベクトル演算の基礎を復習した
 - 行列とベクトルの積
 - 内積・外積
 - 逆行列
 - 固有値・固有ベクトル
 - 対角化

今日復習した内容は色々な分野で頻繁に出てくるので**覚えて**ください

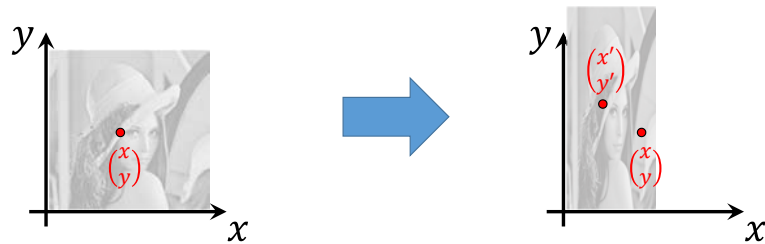
画像の線形変換



- 行列の積により画像を変形する線形変換を紹介する
- 行列の形で、**拡大縮小・回転・鏡映・せん断**、という変換に分類される
- 変換の**合成**も行なえる

線形変換

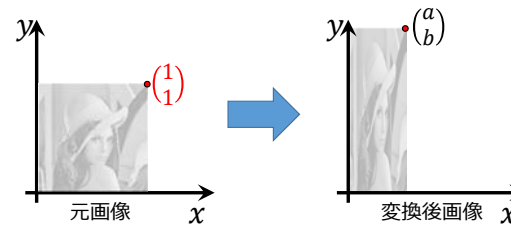
- 画像は2次元座標系に配置されているとする
 - 教科書に合わせて左下を原点とする
 - 環境(Windowsとか)によっては左上が原点のことも多い
- 空間内の全ての点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をかけ, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と変形する
 - つまり2次元空間全体が行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ により歪められる



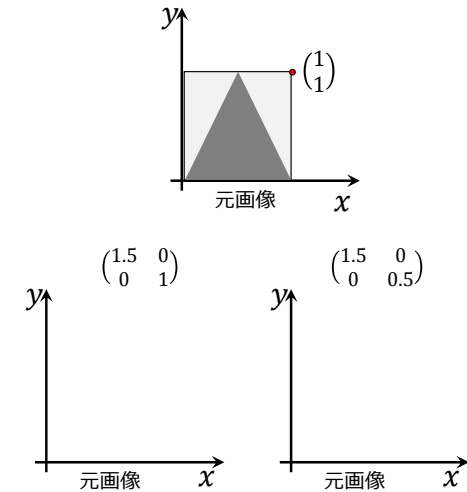
拡大縮小

X軸方向に a 倍, y軸方向に b 倍する変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



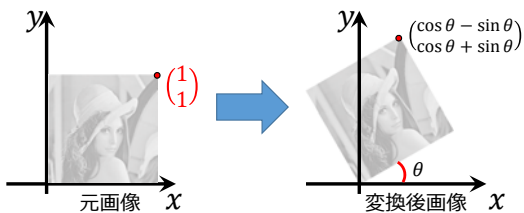
練) 変換結果を図示し
点(1,1)の移動後の座標を示せ



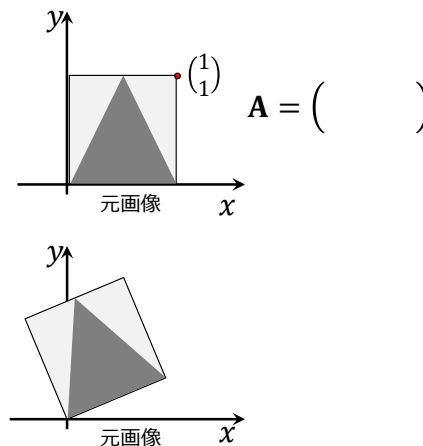
回転

原点を中心に角度 θ だけ回転する変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



練) $\theta = \pi/6$ の回転行列 \mathbf{A} を示せ
 \mathbf{A} により下画像の変換結果を図示せよ
また, 点(1,1)の移動後の座標を示せ

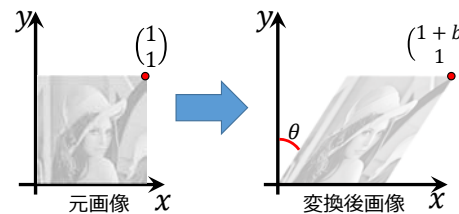


せん断 (スキュー)

X軸方向に角度 θ だけ歪める変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

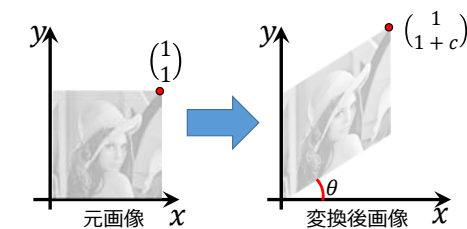
ただし $b = \tan \theta$



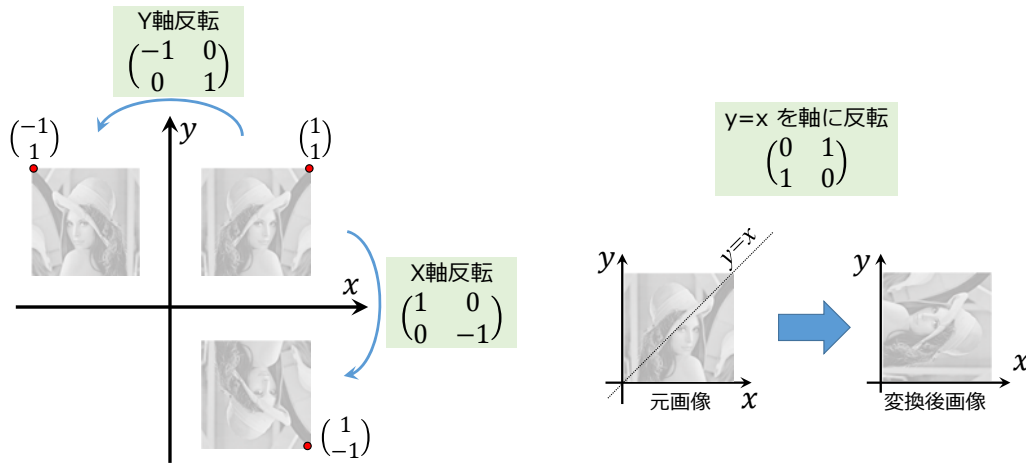
Y軸方向に角度 θ だけ歪める変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

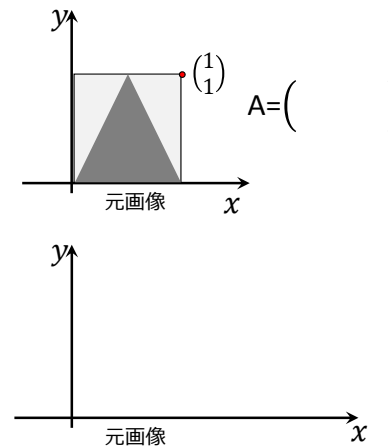
ただし $c = \tan \theta$



鏡映: 直線に対して反転する変換



- 練習
- $\theta = \pi/4$ のx軸方向せん断変換Aを示せ
 - Aによる下画像の変換結果を図示せよ
 - Aによる点(1,1)の移動後の座標を示せ



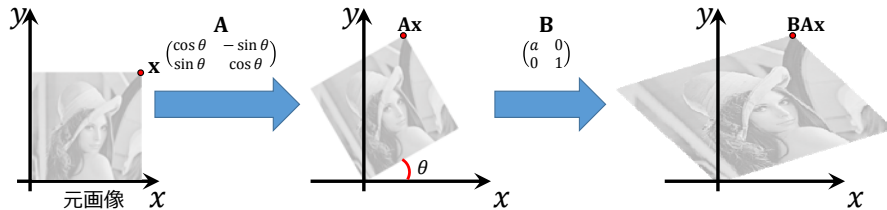
- $\theta = \pi$ の回転変換行列を示せ
- Y軸に対して鏡映変換し、さらにX軸に対して鏡映変換する変換をひとつの行列で示せ

線形変換：合成

2つ以上の変換を続けて行う状況を考える

- 例1) θ 回転し、さらにx軸方向に a 倍に拡大
- 例2) x軸方向に45度せん断し、さらに45度回転

→ 複数の連続した変換はひとつの線形変換で表現できる



この2ステップの変換は、 $C = BA = \begin{pmatrix} a \cos \theta & -a \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ というひとつの線形変換とみなせる

ちょっと蛇足ですが。。。

- 角度 $\theta + \phi$ 回転する回転行列は $\begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix}$ と定義される

一方 θ 回転してから ϕ 回転しても同じことなので、

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

この右辺を整理すると

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix}$$

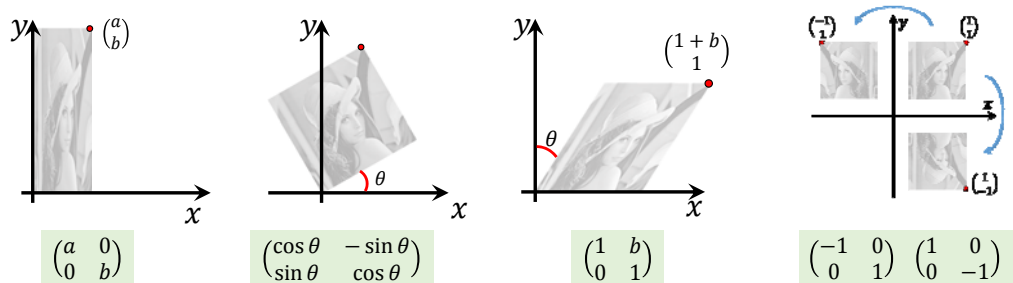
となり

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$$

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$$

が現れる (もう覚えなくていい)

画像の線形変換：まとめ



- 行列の積により様々な変換が行える
- 行列の形で、**拡大縮小・回転・鏡映・せん断**、という変換に分類される
- 変換の合成も行なえる

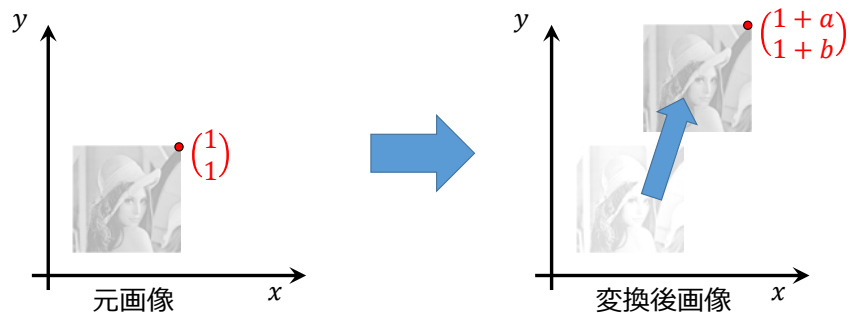
Affine変換と同次座標系

平行移動

(X,Y)方向に(a,b)だけ平行移動する変換

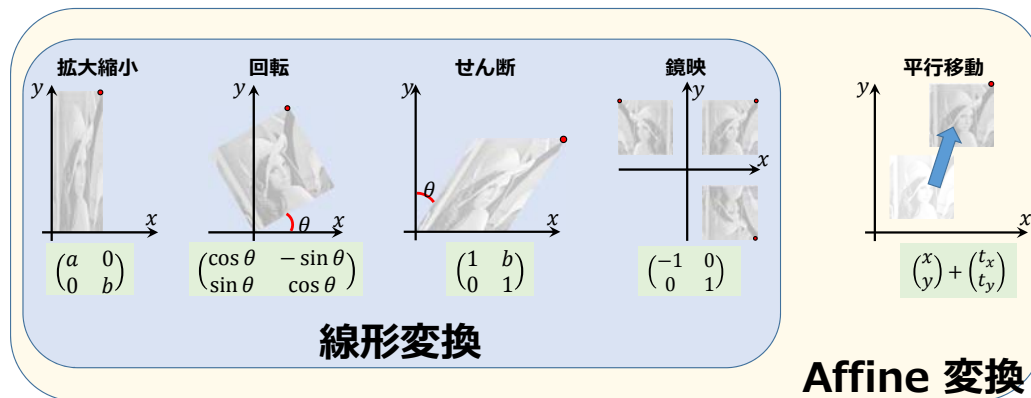
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

※これは行列の積ではないので線形変換ではない



Affine 変換

- **平行移動**と**線形変換**により得られる得られる変換のこと
- 英語発音は「アフライン」だけど、アフィンと読む人も多い



同次座標系表現

2次元座標 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を 3次元ベクトル $\begin{pmatrix} wx \\ wy \\ w \end{pmatrix}$ と表記する方法

同じ2次元座標を表す同次座標を同値であると言い、式では『 \sim 』記号で表す

例) 2次元座標 $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ は、同次座標で $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}$ と表せる

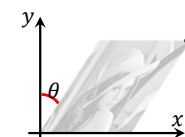
例) 同次座標 $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}$ は同値である、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}$

とりあえず $w = 1$ の場合を考える

2次元座標 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は、同次座標では $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ と表記できる

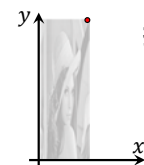
アフィン変換の同次座標表現

せん断



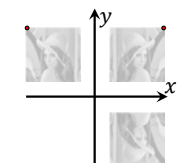
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

拡大縮小



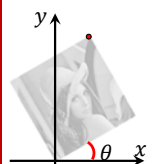
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

鏡映



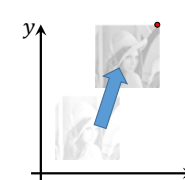
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

回転



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

平行移動



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここが行列の積で書ける!

同時座標表現の利点

平行移動を行列の積で表せる

つまりアフィン変換を行列の積の形で表現できる

拡大縮小

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

回転

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

せん断

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

鏡映

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

平行移動

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

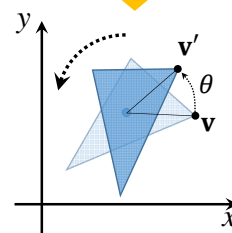
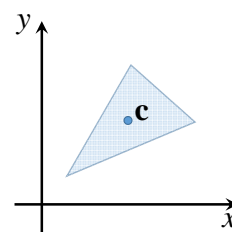
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

同時座標表現の利点



例: 重心 (c_x, c_y) を中心に反時計回りに θ 回転

通常の2次元座標表現

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$

同次座標系表現

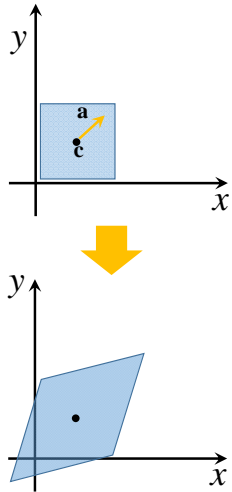
$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_x \\ 0 & 1 & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c_x \\ 0 & 1 & -c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{v}' = \mathbf{T}(c)\mathbf{R}(\theta)\mathbf{T}(-c)\mathbf{v}$ ← 順番に変換行列を掛ける

変換すべてが行列の形で書けるので

- **変換の順序が分かりやすい**
- **変換行列の積を一つの行列として前計算可能: $\mathbf{v}' = \mathbf{M}\mathbf{v}$**

同時座標表現の利点：もう少し複雑な例



例) 重心 (c_x, c_y) を固定して軸 \mathbf{a} 方向に s 倍

通常の2次元座標表現

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos -\theta & -\sin -\theta \\ \sin -\theta & \cos -\theta \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$

同次座標系表現

$$\mathbf{v}' = \mathbf{T}(\mathbf{c})\mathbf{R}(\theta)\mathbf{S}(s, 1)\mathbf{R}(-\theta)\mathbf{T}(-\mathbf{c})\mathbf{v}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_x \\ 0 & 1 & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

θ は \mathbf{a} と x 軸の成す角

変換すべてが行列の形で書けるので

- 変換の順序が分かりやすい
- 変換行列の積を一つの行列として前計算可能: $\mathbf{v}' = \mathbf{M}\mathbf{v}$

まとめ：アフィン変換と同次座標系

平行移動と線形変換（回転・拡大など行列積による変換）で可能な変換を**アフィン変換**と呼ぶ

二次元空間の点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は**同次座標系**で $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ と表せる

同次座標系表現における基本的な変換行列は以下の通り

拡大 Scaling	回転 Rotation	せん断 Skew	鏡映 Reflectance	平行移動 Translation
$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

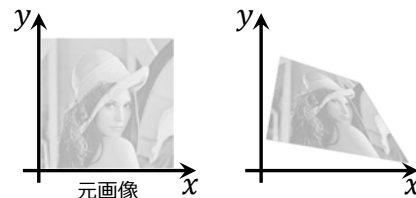
射影変換

- 同次座標表現した, affine変換の基本変換は, 左下2要素は0, 右下は1
- これらを合成しても, 左下の2要素は0, 右下は1のまま

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 同次座標系表現において, より一般的な下の形の変換を**射影変換**と呼ぶ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$



射影変換では, 第三要素が1でなくなる可能性があるため, この式は『=』でなく『同値~』を使って表現される

変換の名称と包含関係

