デジタルメディア処理2

担当: 井尻 敬

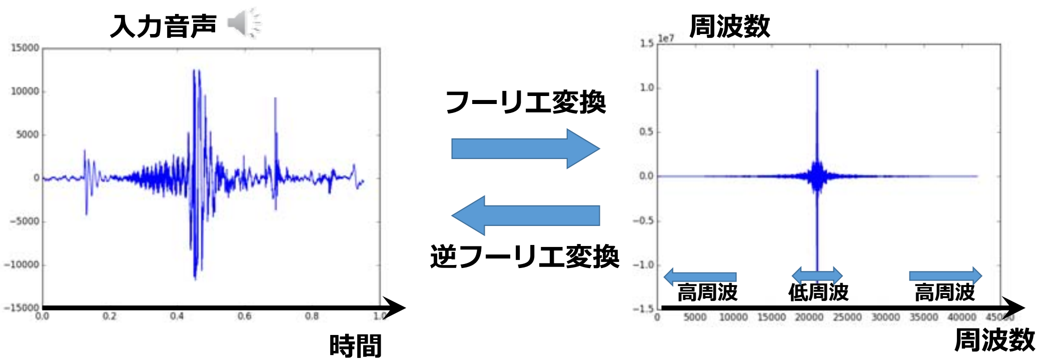
Contents

- **フーリエ変換の概要**
- フーリエ級数展開とフーリエ変換
- 離散フーリエ変換とその性質
- 周波数フィルタリング

フーリエ変換とは（音）

FourierSound.py

- 横軸が時間の関数を、横軸が周波数の関数に変換する手法

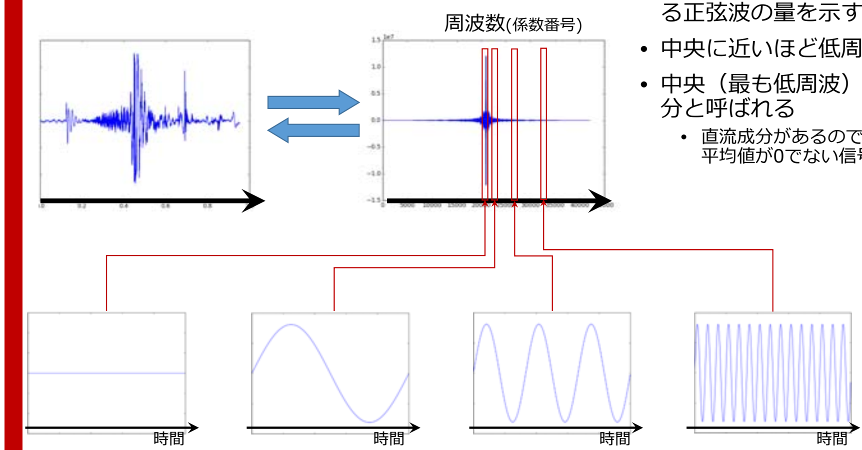


注) グラフ縦軸は音圧

注) グラフ横軸は係数番号（Hzではない）
グラフ縦軸は係数の実部

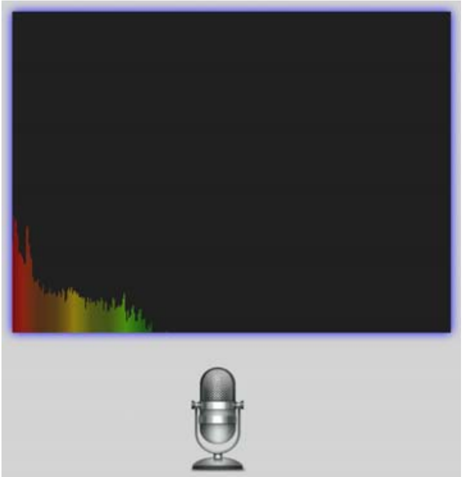
フーリエ変換とは（音）

FourierSound.py



- フーリエ変換後の関数は元信号に含まれる正弦波の量を示す
- 中央に近いほど低周波，外ほどが高周波
- 中央（最も低周波）は，定数項で直流成分と呼ばれる
  - 直流成分があるので正弦波の組み合わせでも平均値が0でない信号を作れる

※下の波はイメージ
※本来はもっともっと細かいです。



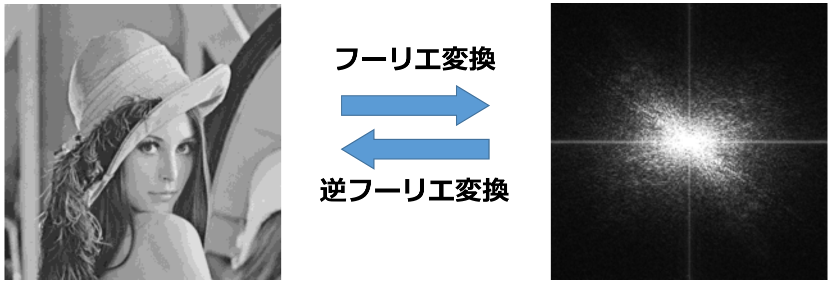
音の実時間フーリエ変換

データ量に依存するが1D/2D
のフーリエ変換は高速なので
実時間解析可能

Spector Analyzer
by Hidetomo Kataoka @ 立命館大

フーリエ変換とは （画像）

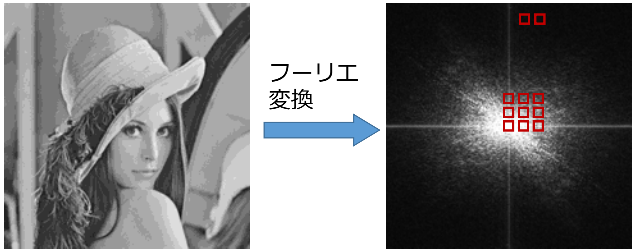
- 横軸が時間/空間の関数を、横軸が周波数の関数に変換する手法

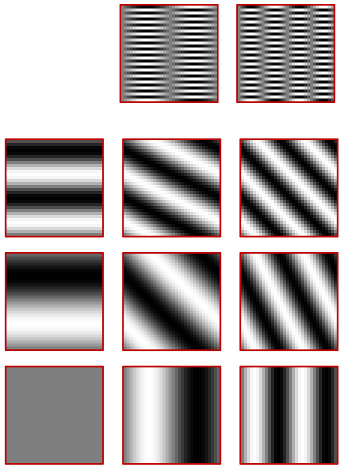


画像
(2D空間に画素が並ぶ)

周波数画像
(画素は特定周波数の大きさを示す)

フーリエ変換とは （画像）





この図はイメージです
本来は現画像と同サイズで
もっと細かいです

- フーリエ変換後の画像の画素は元信号
  に含まれる正弦波の量を示す
- 中央付近が低周波，外側が高周波
- 中央画素は，定数項（直流成分）

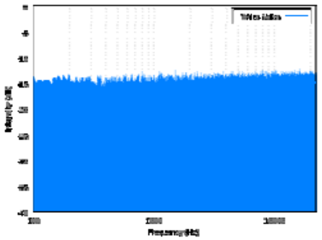
→ 任意の画像はしましま画像の和で表現できる

フーリエ変換とは （画像）

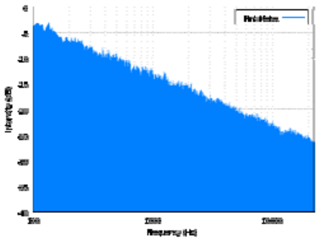
FourierPaint.py
FourierImg.py

余談 (ノイズ)

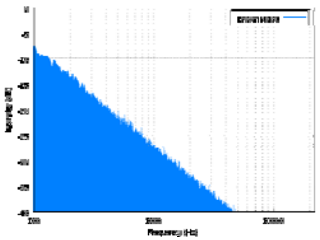
ノイズ（雑音）には，それが含む周波数の分布に応じて特定の名前が付いたものがある



ホワイトノイズ
スペクトルが一様に分布



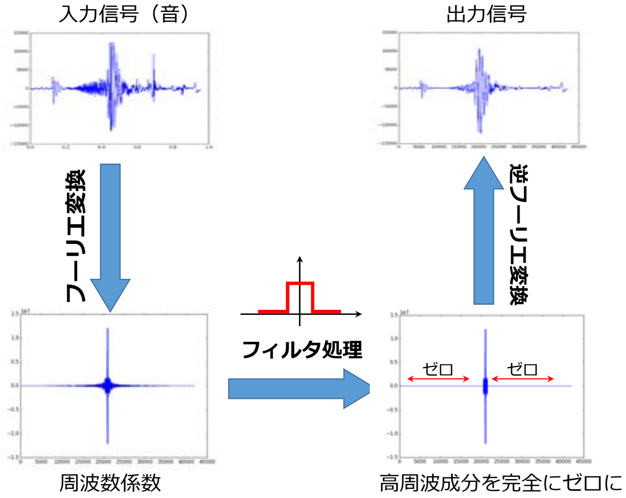
ピンクノイズ
スペクトル分布が 1/fに比例



ブラウンノイズ
スペクトル分布が $1/f^2$に比例

周波数フィルタリング（音）

FourieSound.py



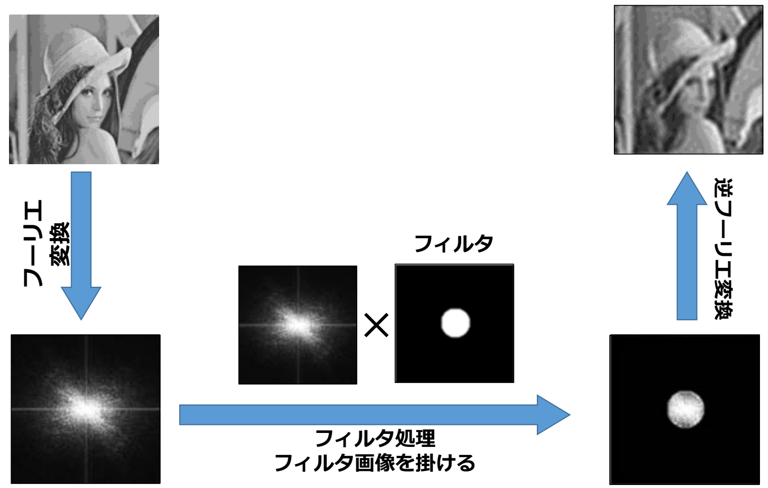
フーリエ変換により周波数を考慮したfilterが設計できる
1. フーリエ変換し
2. 周波数空間でフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

周波数フィルタリング（音）

イコライザ
周波数ごとにボリュームを調整する音質調整器
1. 音源をフーリエ変換し
2. 周波数ごとにフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

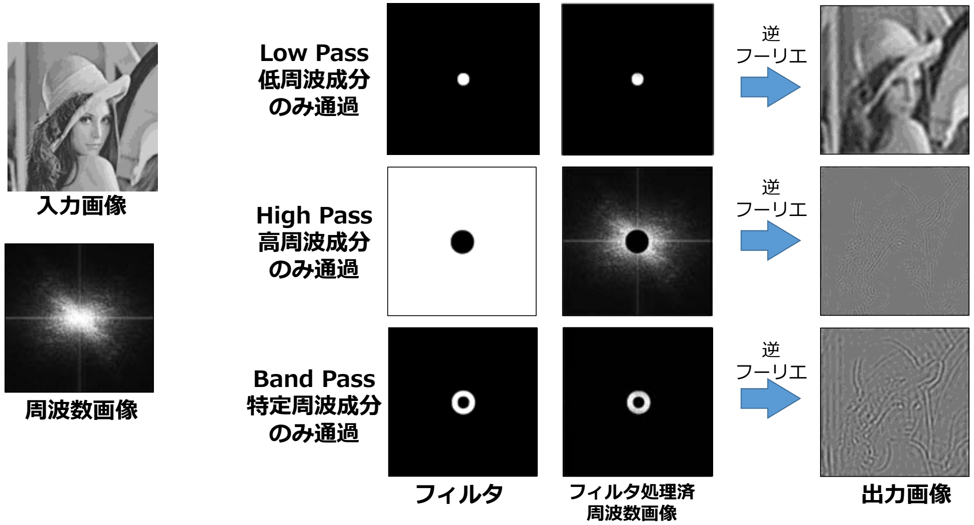
Itunesのイコライザ

周波数フィルタリング（画像）



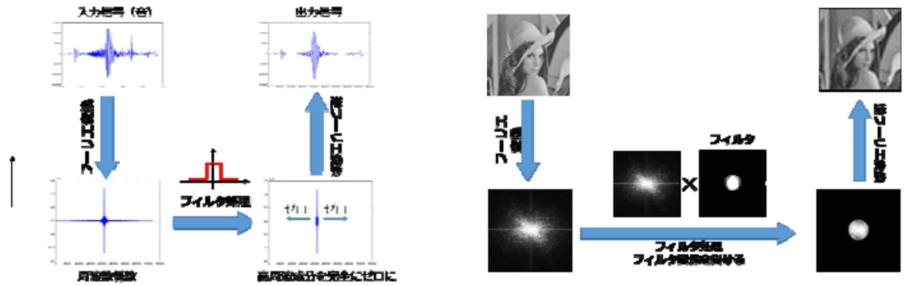
説明のためLowpassの
半径を大きく可視化
本当はもっと小さい

周波数フィルタリング（画像）



まとめ：音・画像のフーリエ変換の概要

- フーリエ変換は，横軸時間の関数を横軸周波数の関数に変換する
  - 逆フーリエ変換も定義される
  - 2次元フーリエ変換は画像へ適用できる
  - 周波数空間でフィルタ処理すると，周波数に特化した信号処理が可能



Contents

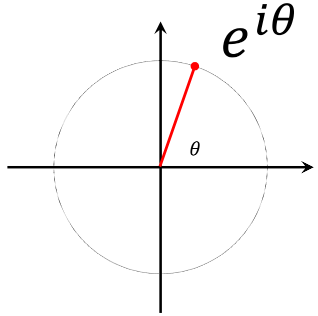
- フーリエ変換の概要
- **フーリエ級数展開とフーリエ変換**
- 離散フーリエ変換とその性質
- 周波数フィルタリング

本講義では，フーリエ変換の意味的な理解と画像処理応用に重点を置きます．
証明と導出は（少しだけしか）扱いません．

詳しく知りたい人は「**金谷先生:これなら分かる応用数学教室**」を強くお勧めします．

オイラーの式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$



$e^{i\theta}$ はガウス平面における単位円に乗る

これはもうこういう表記法だと思って覚えてください

練習

三角関数を合成せよ

- $a \sin\theta + b\cos\theta$

複素数の積を求めよ

- $a\,(\cos\theta + i\sin\theta) * b\,(\cos\phi + i\sin\phi\quad)$

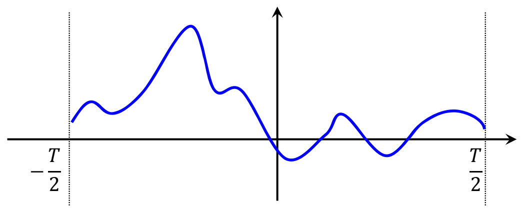
以下の関係を証明せよ

- $e^{i\theta} e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
- $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

フーリエ級数

区間$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$上の連続関数$f(t)$は、

フーリエ級数で表現できる.



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega_0\, t\; dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\omega_0 t\; dt$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ：基本周波数

フーリエ級数

区間$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$上の連続関数$f(t)$は、

フーリエ級数で表現できる.

$$f(t) = \frac{a_0}{2}$$

$$+a_1 \cos 1\omega_0 t + b_1 \sin 1\omega_0 t$$

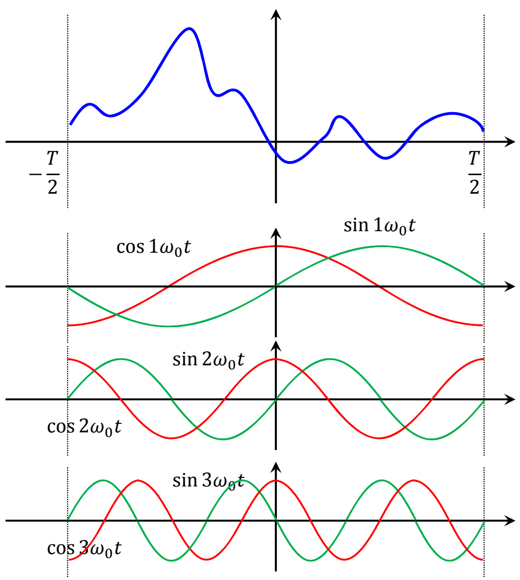
$$+a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t$$

$$+a_3 \cos 3\omega_0 t + b_3 \sin 3\omega_0 t$$

$$+\cdots$$

基本周波数

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$



フーリエ級数

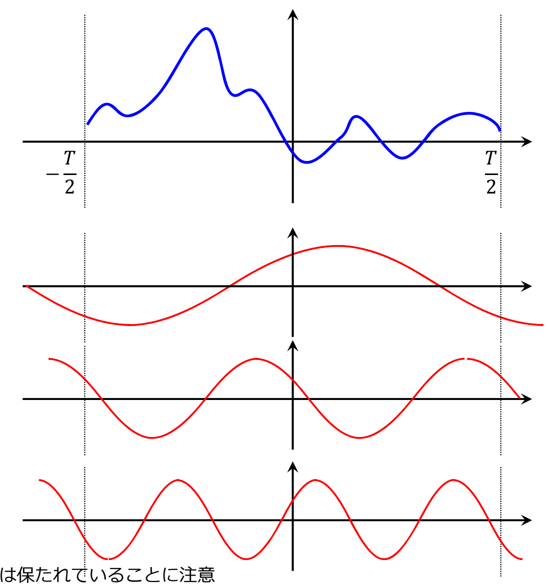
区間$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$上の連続関数$f(t)$は、

フーリエ級数で表現できる.

$$f(t) = \frac{a_0}{2}$$

$$+ a_1' \sin(1\omega_0 t + \phi_1)$$
$$+ a_2' \sin(2\omega_0 t + \phi_2)$$
$$+ a_3' \sin(3\omega_0 t + \phi_3)$$

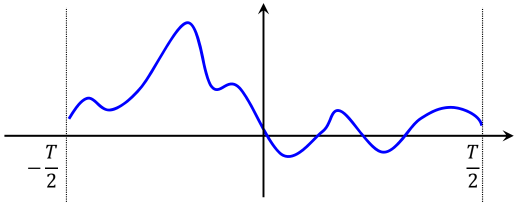
$$+\cdots$$



「sin　と cos の振幅を変えて足す」とも思えるが、
「a_k と b_k で振幅と位相ずれを制御する」とも見てもよい

位相がずれても、$-\frac{T}{2}$ と $\frac{T}{2}$ における位置は同じなので、周期性は保たれていることに注意

フーリエ級数(**複素数表記**)



区間$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$上の連続関数$f(t)$は、

フーリエ級数で表現できる.

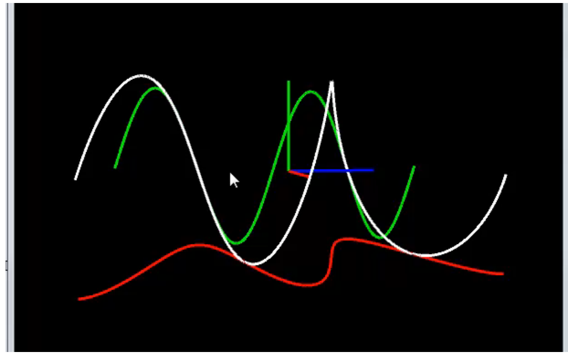
$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{ik\omega_0 t}$$

$$C_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-ik\omega_0 t}dt$$

この複素数表記された
正弦波を重ね合わせていることは分かるんだけど、
$\cos k\omega_0 t$, $\sin k\omega_0 t$ に比べてイメージしにくい

フーリエ級数(複素数表記)

$f(t)=e^{ik\omega_0 t}=\cos k\omega_0 t+i\sin k\omega_0 t$
この正弦波は何なのか？



赤が実軸
緑が虚軸
青が時間軸

https://www.youtube.com/watch?v=YjEkBjDhbr4

フーリエ級数(複素数表記)

区間$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$上の連続関数$f(t)$は、

フーリエ級数で表現できる.

$f(t)=C_0$

$+C_1e^{i1\omega_0 t}-C_{-1}e^{-i1\omega_0 t}$

$+C_2e^{i2\omega_0 t}-C_{-2}e^{-i2\omega_0 t}$

$+C_3e^{i3\omega_0 t}-C_{-3}e^{-i3\omega_0 t}$

$+\cdots$

複素数の掛け算 $Ce^{i\omega t}$ は
$C=r(\cos\phi+i\sin\phi)$とすると、
$Ce^{i\omega t}=re^{i(\omega t+\phi)}$ となる

つまり， Cを掛けるというのは、
$e^{i\omega t}$に対し位相をθずらしてr 倍する
操作だといえる

フーリエ級数(複素数表記)

区間$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$上の連続関数$f(t)$は、

フーリエ級数で表現できる.

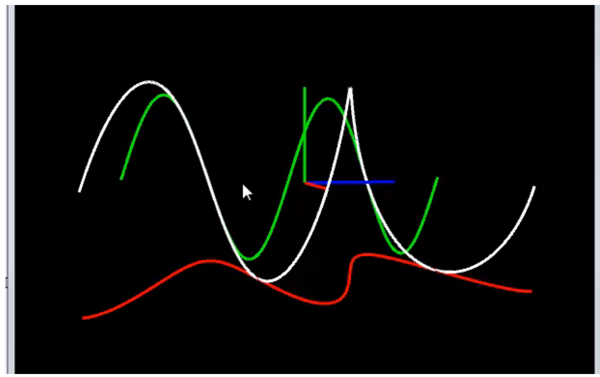
$f(t)=C_0$

$+C_1e^{i1\omega_0 t}-C_{-1}e^{-i1\omega_0 t}$

$+C_2e^{i2\omega_0 t}-C_{-2}e^{-i2\omega_0 t}$

$+C_3e^{i3\omega_0 t}-C_{-3}e^{-i3\omega_0 t}$

$+\cdots$



動画の後半参照 or FourieViz.pdeをprocessingで実行してみてください。

まとめ: フーリエ級数展開

※今回は導出と証明を省きました
詳しく知りたい人は教科書参照

- オイラーの式　$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)},\ \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta},\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

- フーリエ級数展開：周期Tを持つ関数は正弦波の重ね合せで表現可

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t),\ \ a_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega_0 t\, dt,\ \ b_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\omega_0 t\, dt$$

- フーリエ級数展開 (複素数表現)：

上式にオイラーの式を代入すると以下のように変形できる

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t},\ C_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-ik\omega_0 t}dt$$

練習: 下の式(1)-(3)より，式(4)(5)を導け

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \quad \dots(1)$$

$$a_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega_0\, t\, dt \quad \dots(2)$$

$$b_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\omega_0 t\, dt \quad \dots(3)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega_0 t} \quad \dots(4)$$

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-ik\omega_0 t}dt \quad \dots(5)$$

金谷先生:これなら分かる応用数学教室の3.3章を参照のこと

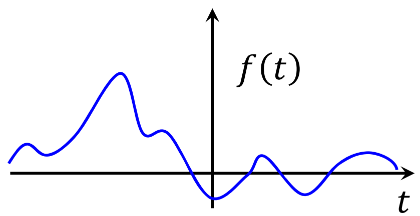
フーリエ変換とは

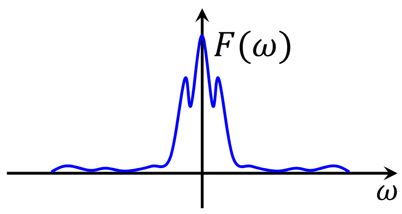
フーリエ変換：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

逆フーリエ変換：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega$$





- 時間tの関数 $f(t)$ を、周波数ωの関数$F(\omega)$に変換する
- $f(t)$と$F(\omega)$は複素数関数である（$f(t)$は実数関数のことが多い）
- フーリエ級数展開において T → ∞ とすると導出できる

フーリエ変換には，少し異なる複数の定義が存在する

フーリエ変換：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

逆フーリエ変換：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega$$

フーリエ変換：

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

逆フーリエ変換：

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega$$

フーリエ変換：

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\omega t}dt$$

逆フーリエ変換：

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i2\pi\omega t}\, d\omega$$

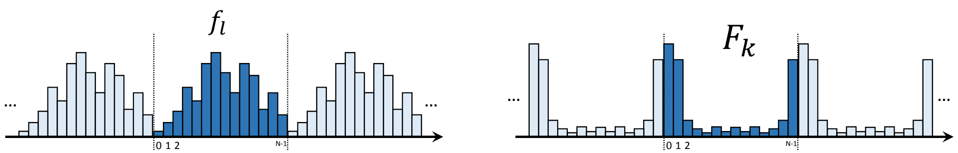
フーリエ変換の導出は，『金谷健一先生これなら分かる応用数学教室』の3.4章を参照

Contents

離散フーリエ変換（1D）

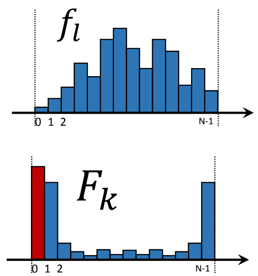
フーリエ変換 $F_k = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i\frac{2\pi kl}{N}}$

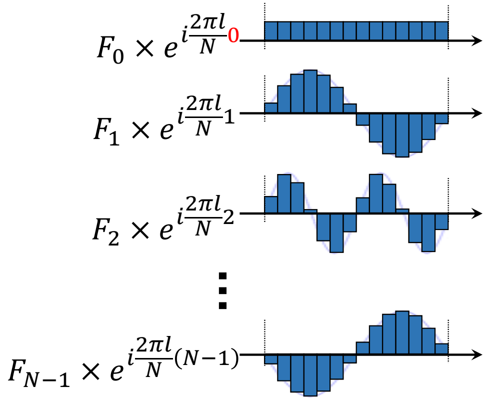
逆フーリエ変換 $f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i\frac{2\pi kl}{N}}$



- 周期Nの離散値f_lを周期Nの離散値F_kに変換する
- f_lとF_kは複素数（ただしf_lは実数列のことが多い）
- f_lが実数の場合$F_k = \overline{F_{-k}}$が成り立つ（$F_{-k} = F_{N-k}$）

$$f_l = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i\frac{2\pi kl}{N}}$$





※グラフは全て複素数

- F_0は定数（直流成分）に対応
- F_kは[0,N-1] 区間においてN回振動する正弦波に対応
- K=N/2がもっとも高周波で，k=N-1はk=1の正弦波と同じ周波数（位相は逆）

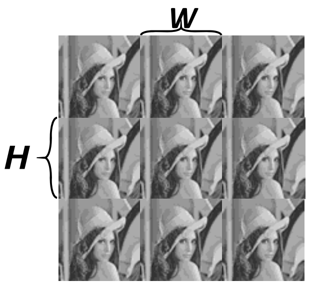
離散フーリエ変換（2D）

フーリエ変換：

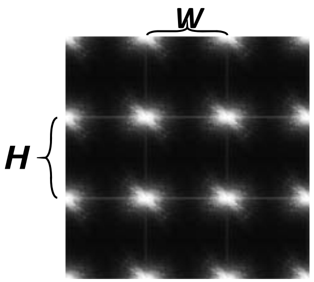
$$F_{uv}=\frac{1}{WH}\sum_{y=0}^{H-1}\sum_{x=0}^{W-1} f_{xy}e^{-\frac{2\pi xu}{W}i}e^{-\frac{2\pi yv}{H}i}$$

逆フーリエ変換：

$$f_{xy}=\sum_{v=0}^{H-1}\sum_{u=0}^{W-1} F_{uv}e^{\frac{2\pi xu}{W}i}e^{\frac{2\pi yv}{H}i}$$



f_{xy}

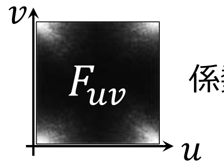


F_{uv}

縦横方向に周期H/Wで繰り返す離散値 f_{xy}を，離散値 F_{uv}に変換

f_{xy}とF_{uv}は複素数列（f_{xy}は画像-実数列-のことが多い）v

$$f_{xy}=\sum_{v=0}^{H-1}\sum_{u=0}^{W-1} F_{uv}e^{\left(\frac{2\pi xu}{W}+\frac{2\pi yv}{H}\right)i}$$

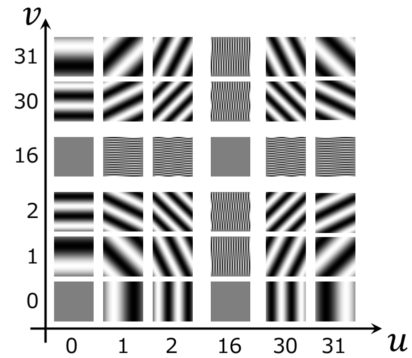


係数画像

- $F_{0,0}$は定数（直流成分）の係数
- $F_{u,v}$は，画像区間において『縦にu回・横にv回振動する正弦波画像』の係数
- $U=v=$N/2がもっとも高周波で，$u=N-1$は$u=1$の正弦波と同じ周波数（位相は逆）

$W=H=32$のときの

$$sin\left(\frac{2\pi xu}{W}+\frac{2\pi yv}{H}\right)$$



$F_{u,v}$は上の（u,v)番目の画像の係数

実際は$F_{u,v}$は複素数画像

離散フーリエ変換の計算例

$$F_k=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} f_l e^{-i\frac{2\pi kl}{N}}$$

↑複素数とかでできて
ややこしそうだけど
ただの和分

N = 8 のとき

入力：$f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7,$

$$F_0=\frac{1}{8}\left[f_0\left(\cos\frac{2\pi 0}{N}+i\sin\frac{2\pi 0}{N}\right)+f_1\left(\cos\frac{2\pi 0}{N}+i\sin\frac{2\pi 0}{N}\right)+\cdots+f_7\left(\cos\frac{2\pi 0}{N}+i\sin\frac{2\pi 0}{N}\right)\right]$$

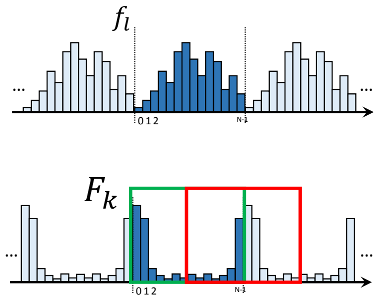
$$F_1=\frac{1}{8}\left[f_0\left(\cos\frac{2\pi 0}{N}+i\sin\frac{2\pi 0}{N}\right)+f_1\left(\cos\frac{2\pi 1}{N}+i\sin\frac{2\pi 1}{N}\right)+\cdots+f_7\left(\cos\frac{2\pi 7}{N}+i\sin\frac{2\pi 7}{N}\right)\right]$$

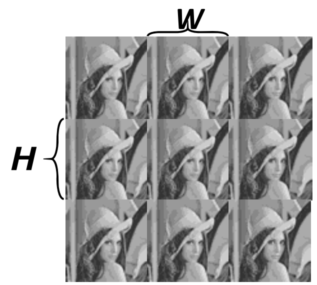
$$F_2=\frac{1}{8}\left[f_0\left(\cos\frac{2\pi 0}{N}+i\sin\frac{2\pi 0}{N}\right)+f_1\left(\cos\frac{2\pi 2}{N}+i\sin\frac{2\pi 2}{N}\right)+\cdots+f_7\left(\cos\frac{2\pi 14}{N}+i\sin\frac{2\pi 14}{N}\right)\right]$$

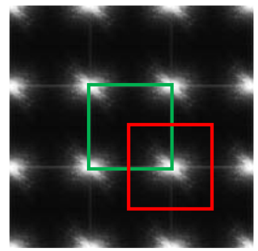
$$F_3=\frac{1}{8}\left[f_0\left(\cos\frac{2\pi 0}{N}+i\sin\frac{2\pi 0}{N}\right)+f_1\left(\cos\frac{2\pi 3}{N}+i\sin\frac{2\pi 3}{N}\right)+\cdots+f_7\left(\cos\frac{2\pi 21}{N}+i\sin\frac{2\pi 21}{N}\right)\right]$$

⋮

Shiftの話

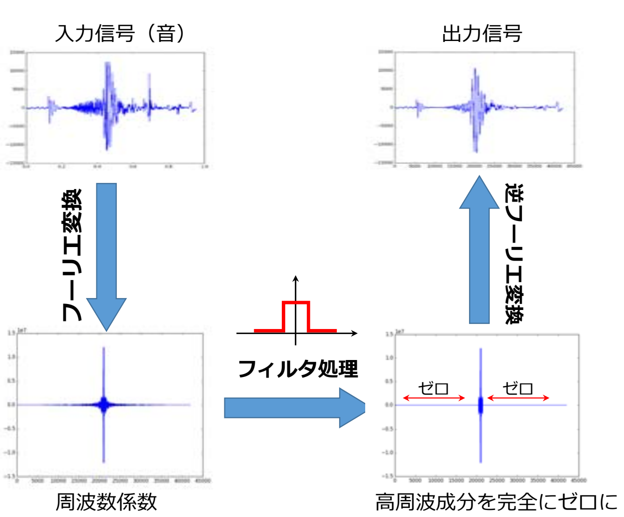






- フーリエ変換を実装すると，ピークが端に来る変換結果になる
  - **上図緑四角**：これは間違いじゃない
  - 低周波成分を中心においたほうが分かりやすいので**上図赤四角**の位置を出力することが多い
  - このshiftを行なう関数が用意されていることも → np.fft.ifftshift()

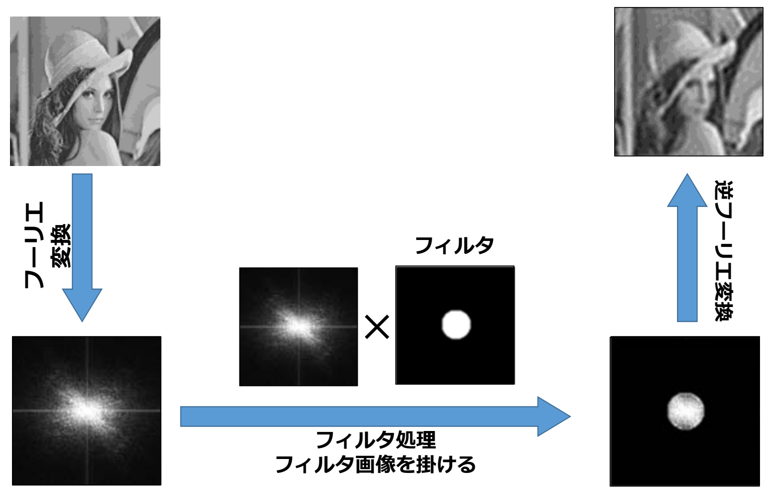
周波数フィルタリング（音）



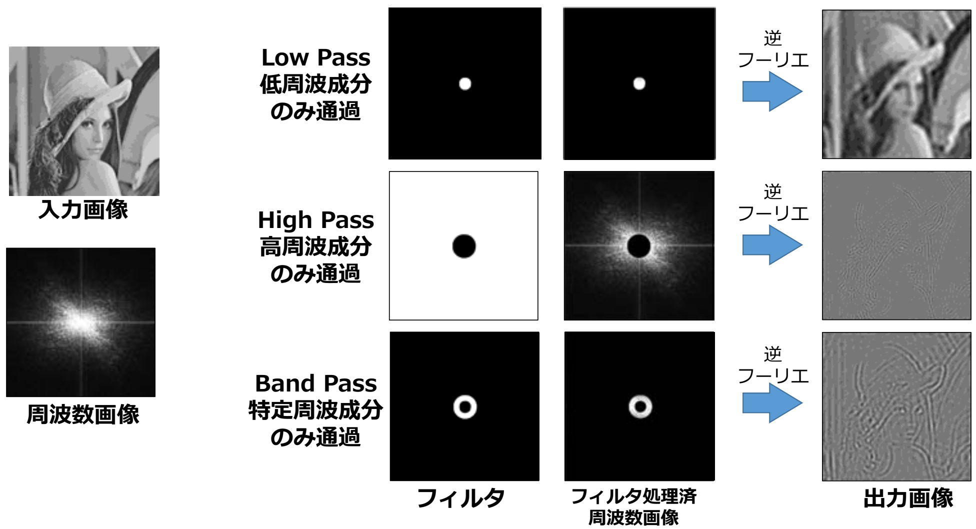
フーリエ変換により周波数を考慮したfilterが設計できる

1. フーリエ変換し
2. 周波数空間でフィルタを掛け
3. 逆フーリエ変換

周波数フィルタリング（画像）

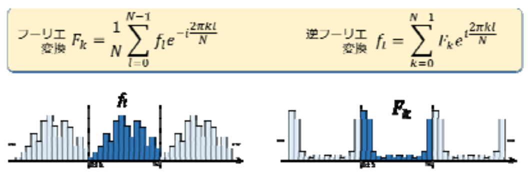


周波数フィルタリング（画像）



まとめ：離散フーリエ変換と周波数フィルタ

離散フーリエ変換（1D/2D）の実装方法を解説した



周波数空間でマスクを掛ける周波数フィルタを紹介した