

# デジタルメディア処理1

担当: 井尻 敬

## デジタルメディア処理1、2017（後期）

- 09/26 イントロダクション1：デジタル画像とは、量子化と標本化, Dynamic Range
- 10/03 イントロダクション2：デジタルカメラ, 人間の視覚, 表色系
- 10/10 フィルタ処理1：トーンカーブ, 線形フィルタ
- 10/17 フィルタ処理2：非線形フィルタ, ハーフトニング
- 10/24 フィルタ処理3：離散フーリエ変換と周波数フィルタリング
- 11/07 前半のまとめと中間試験
- 11/14 画像処理演習：python入門（演習室）
- 11/21 画像処理演習：フィルタ処理（演習室）
- 11/28 画像処理演習：フィルタ処理（演習室）
- 12/05 画像処理演習：フィルタ処理（演習室）
- 12/12 画像の幾何変換 1：アファイン変換
- 12/19 画像の幾何変換 2：画像の補間
- 01/16 画像復元：ConvolutionとDe-convolution（変更する可能性有り）
- 01/23 後半のまとめと期末試験

## 画像の幾何変換 1

### 達成目標

- 画像の幾何学変換を計算でき, その効果を説明できる.
- 掃除変換・剛体変換・アファイン変換・射影変換を正しく計算でき, それぞれの効果を説明できる

### Contents

- 行列とベクトルの復習
- 線形変換（拡大・縮小 / 回転 / 鏡映 / せん断 / 合成）
- アフィン変換（平行移動 / 同次座標系）

## 表記について

- スカラー変数はイタリック体 :  $a, b, c$
- ベクトルは小文字ボード体 :  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$
- 行列は大文字ボード体 :  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$
- $\mathcal{R}$  を利用して次元を明確に :  $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^3, \mathbf{A} \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$
- 右肩  $T$  は転置を表す :  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{a}^T = (x \ y)$   
 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

CG分野の論文ではよく見かける表記ですが, どの分野もこれというわけではないので注意してください.

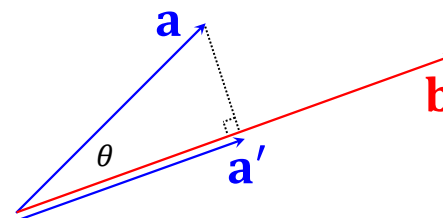
## 線形代数の復習(1)

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$  のとき以下の計算をせよ

- (1)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
- (2)  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
- (3)  $\|\mathbf{a}\|$

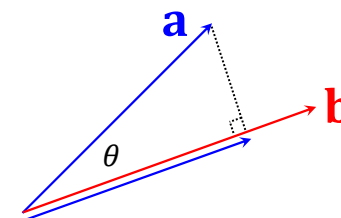
## 内積の意味

$|\mathbf{b}| = 1$  のとき



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

ベクトル  $\mathbf{a}$  をベクトル  $\mathbf{b}$  に射影し  
両者の長さを掛け合わせたもの

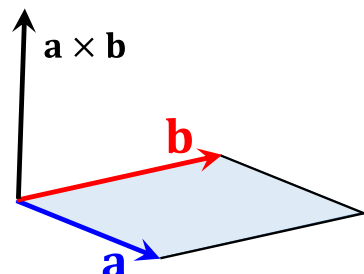


$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cos \theta$$

ベクトル  $\mathbf{a}$  をベクトル  $\mathbf{b}$  に射影した長さ

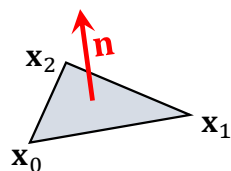
## 外積の意味

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$



二つのベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  に直交するベクトルを返す  
長さはベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  が作る平行四辺形の面積

よくある応用：  
三角形ポリゴンの法線・面積計算



$$\text{法線: } \mathbf{n} = \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}{|(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)|}$$

$$\text{面積: } S = \frac{1}{2} |(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)|$$

## 線形代数の復習(2)

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  のとき以下の計算をせよ

- (1)  $\mathbf{A}\mathbf{a}$
- (2)  $\mathbf{a}^T \mathbf{A}$
- (3)  $\mathbf{A}\mathbf{B}$
- (4)  $\mathbf{A}$  の行列式  $|\mathbf{A}|$  を求めよ

## 線形代数の復習(3)

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ

## 線形代数の復習(4)

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を対角化せよ

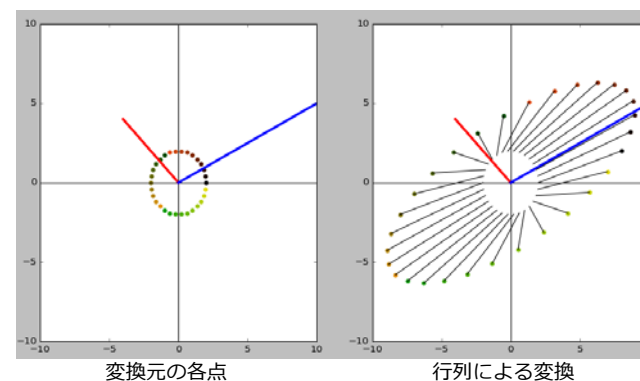
## 線形代数の復習(5)

- 行列の対角化は、様々なところで利用する大切な概念
  - ベキ乗の高速計算  $\mathbf{A}^{30}$
  - 極分解の $\sqrt{\mathbf{A}}$
- 行列はいつも対角化できるわけではない
  - 『 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  が  $n$ 本の線形独立な固有ベクトルを持つとき、 $\mathbf{A}$ は対角化可能』:  $\mathbf{A}$ の持つ  $n$ 個の固有値がすべて異なれば、 $n$ 本の線形独立な固有ベクトルが存在するので対角化可能.
  - 固有値が重複する (固有方程式が重解を持つ) 場合に、対角化できないことがある.

例) 行列  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を対角化せよ

## 固有値・固有ベクトルの意味

EigenVector.py

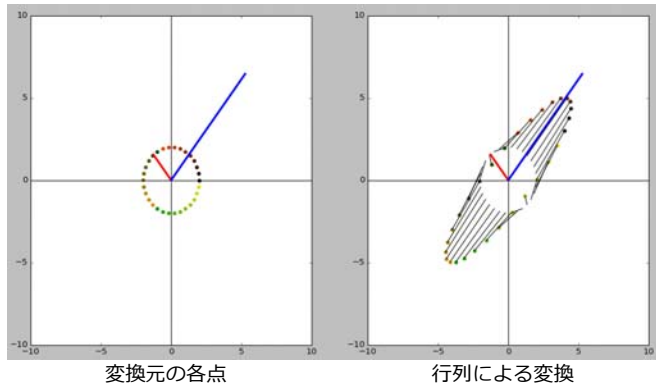


$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$   
固有値・固有ベクトル  
 $2, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, 5, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

赤線・青線は固有ベクトル  
黒線は変換による移動を示す

円周上の点群を変換すると楕円上に乗る  
楕円の主軸と固有ベクトルは一致しない (一致するのは特殊な場合)  
**固有ベクトル上の点は、変換後も固有ベクトル上に乗る**

## 固有値・固有ベクトルの意味



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & 2 \end{pmatrix}$$

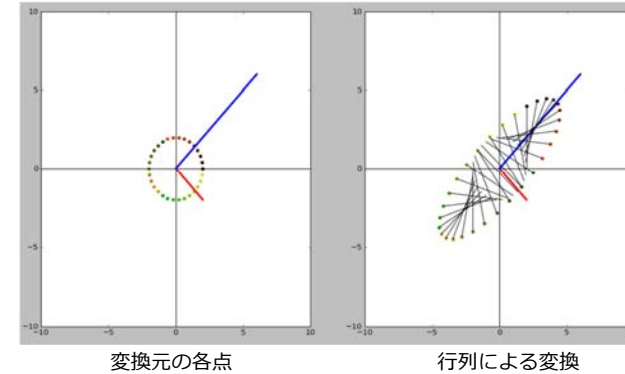
固有値・固有ベクトル

$$-\frac{\sqrt{6}+4}{2}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}+4}{2}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

赤線・青線は固有ベクトル  
黒線は変換による移動を示す

円周上の点群を変換すると楕円上に乗る  
楕円の主軸と固有ベクトルは一致しない（一致するのは特殊な場合）  
**固有ベクトル上の点は、変換後も固有ベクトル上に乗る**

## 固有値・固有ベクトルの意味



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

固有値・固有ベクトル

$$-1, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, 3, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

赤線・青線は固有ベクトル  
黒線は変換による移動を示す

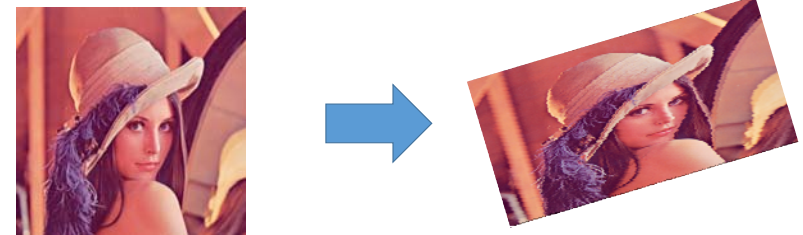
固有ベクトル上の点は、変換後も固有ベクトル上に乗る  
**対称行列の固有ベクトルは互いに直行する**  
**対称行列**による変換では、**楕円の主軸と固有ベクトルが一致**  
固有値が負なので固有ベクトルに対して鏡面変換が起こっている

## まとめ：ベクトルと行列の復習

- 画像処理（とCG）に頻出する行列・ベクトル演算の基礎を復習した
  - 行列とベクトルの積
  - 内積・外積
  - 逆行列
  - 固有値・固有ベクトル
  - 対角化

今日復習した内容は色々な分野で頻繁に出てくるので**覚えて**ください

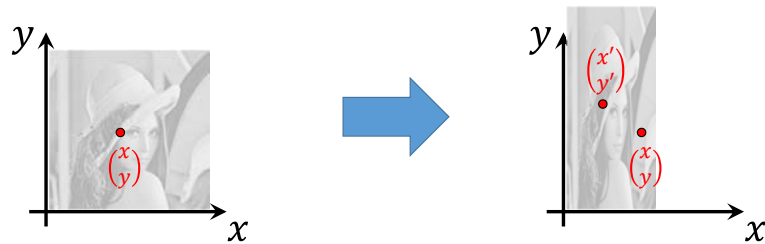
## 画像の線形変換



- 行列の積により画像を変形する線形変換を紹介する
- 行列の形で、**拡大縮小・回転・鏡映・せん断**、という変換に分類される
- 変換の**合成**も行なえる

# 線形変換

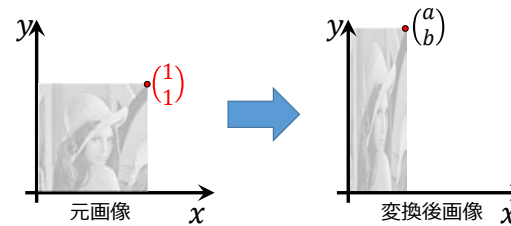
- 画像は2次元座標系に配置されているとする
  - 教科書に合わせて左下を原点とする
  - 環境(Windowsとか)によっては左上が原点のことも多い
- 空間内の全ての点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をかけ,  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と変形する
  - つまり2次元空間全体が行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ により歪められる



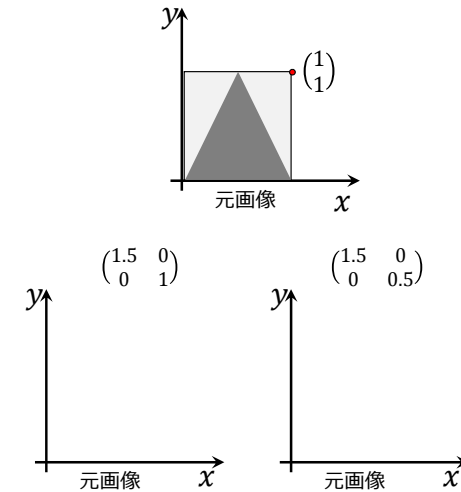
# 拡大縮小

X軸方向に $a$ 倍, y軸方向に $b$ 倍する変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



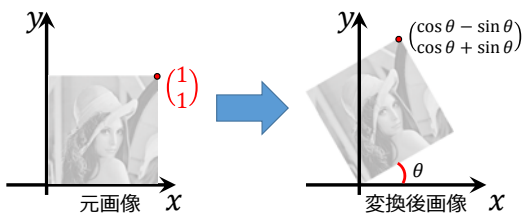
練) 変換結果を図示し  
点(1,1)の移動後の座標を示せ



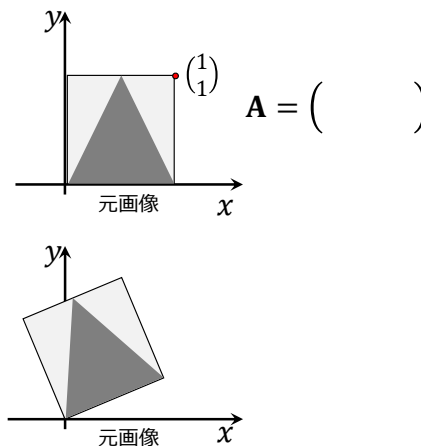
# 回転

原点を中心に角度 $\theta$ だけ回転する変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



練)  $\theta = \pi/6$  の回転行列 $\mathbf{A}$ を示せ  
 $\mathbf{A}$ により下画像の変換結果を図示せよ  
また, 点(1,1)の移動後の座標を示せ

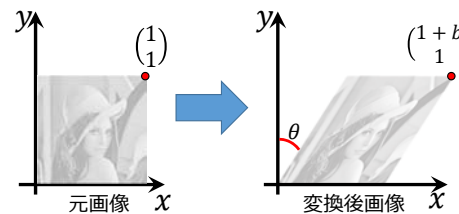


# せん断 (スキュー)

X軸方向に角度 $\theta$ だけ歪める変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

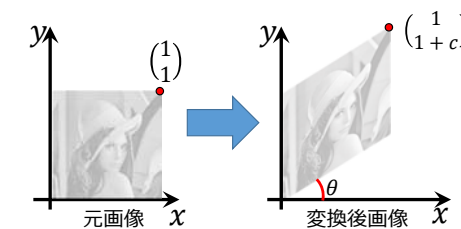
ただし  $b = \tan \theta$



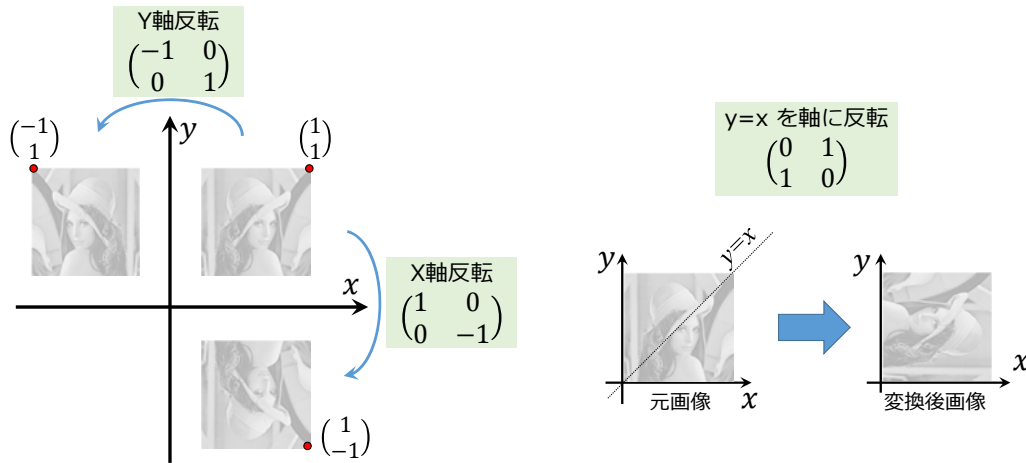
Y軸方向に角度 $\theta$ だけ歪める変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

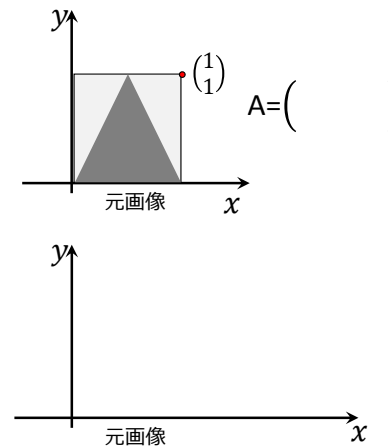
ただし  $c = \tan \theta$



## 鏡映: 直線に対して反転する変換



- 練習
- $\theta = \pi/4$  のx軸方向せん断変換Aを示せ
  - Aによる下画像の変換結果を図示せよ
  - Aによる点(1,1)の移動後の座標を示せ



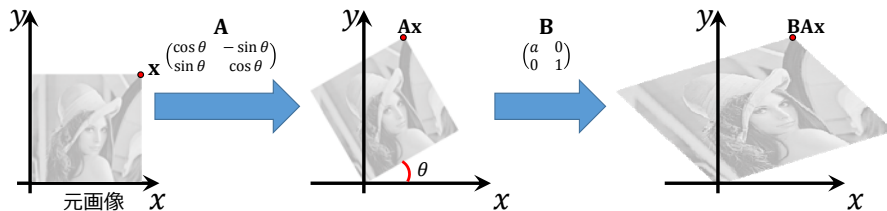
- $\theta = \pi$  の回転変換行列を示せ
- Y軸に対して鏡映変換し、さらにX軸に対して鏡映変換する変換をひとつの行列で示せ

## 線形変換：合成

2つ以上の変換を続けて行う状況を考える

- 例1)  $\theta$ 回転し、さらにx軸方向に  $a$  倍に拡大
- 例2) x軸方向に45度せん断し、さらに45度回転

→ 複数の連続した変換はひとつの線形変換で表現できる



この2ステップの変換は、 $C = BA = \begin{pmatrix} a \cos \theta & -a \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  というひとつの線形変換とみなせる

## ちょっと蛇足ですが。。。

- 角度  $\theta + \phi$  回転する回転行列は  $\begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix}$  と定義される

- 一方  $\theta$ 回転してから  $\phi$ 回転しても同じことなので、

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

この右边を整理すると

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \end{pmatrix}$$

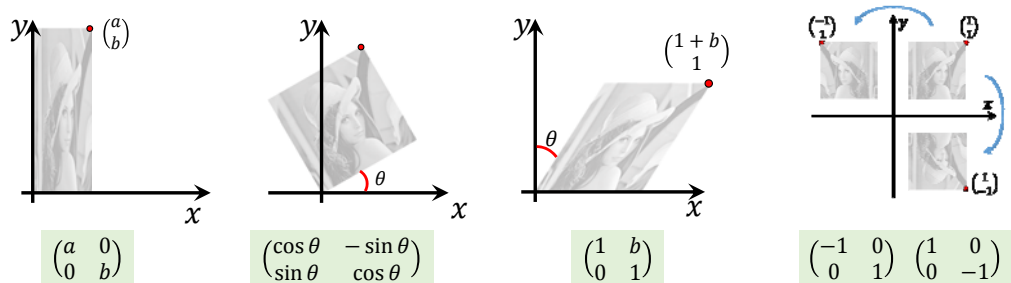
となり

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$$

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$$

が現れる (もう覚えなくていい)

## 画像の線形変換：まとめ



- 行列の積により様々な変換が行える
- 行列の形で、**拡大縮小・回転・鏡映・せん断**、という変換に分類される
- 変換の合成も行なえる

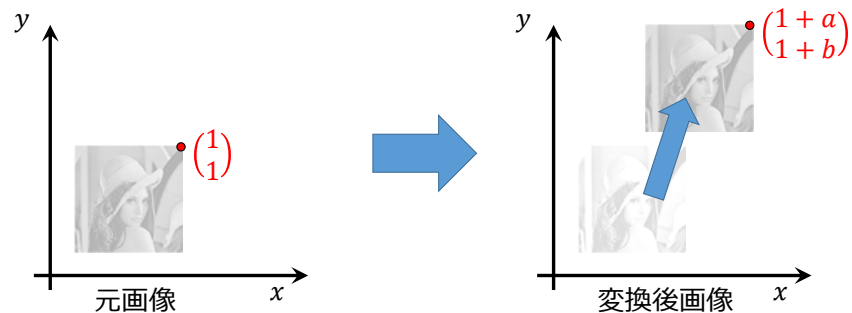
## Affine変換と同次座標系

## 平行移動

(X,Y)方向に(a,b)だけ平行移動する変換

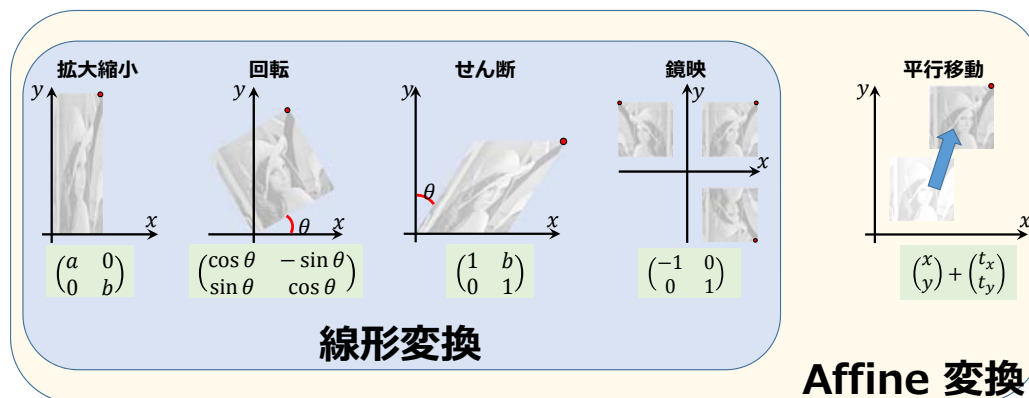
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

※これは行列の積ではないので  
線形変換ではない



## Affine 変換

- **平行移動**と**線形変換**により得られる得られる変換のこと
- 英語発音は「アフライン」だけど、アフィンと読む人も多い



## 同次座標系表現

2次元座標  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  を 3次元ベクトル  $\begin{pmatrix} wx \\ wy \\ w \end{pmatrix}$  と表記する方法

同じ2次元座標を表す同次座標を同値であると言い、式では『 $\sim$ 』記号で表す

例) 2次元座標  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  は、同次座標で  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$  や  $\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$  や  $\begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}$  と表せる

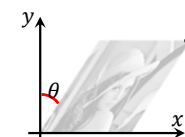
例) 同次座標  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}$  は同値である、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}$

とりあえず  $w = 1$  の場合を考える

2次元座標  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  は、同次座標では  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$  と表記できる

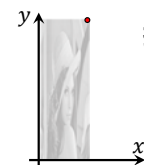
## アフィン変換の同次座標表現

**せん断**



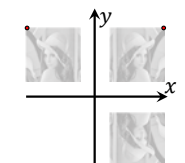
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

**拡大縮小**



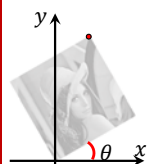
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

**鏡映**



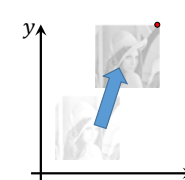
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

**回転**



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

**平行移動**



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここが行列の積で書ける!

## 同時座標表現の利点

平行移動を行列の積で表せる

つまりアフィン変換を行列の積の形で表現できる

**拡大縮小**

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

**回転**

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

**せん断**

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**鏡映**

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**平行移動**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

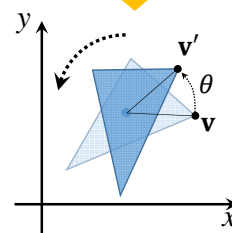
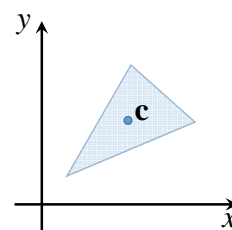
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 同時座標表現の利点



例: 重心  $(c_x, c_y)$  を中心に反時計回りに  $\theta$  回転

通常の2次元座標表現

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$

同次座標系表現

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_x \\ 0 & 1 & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -c_x \\ 0 & 1 & -c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

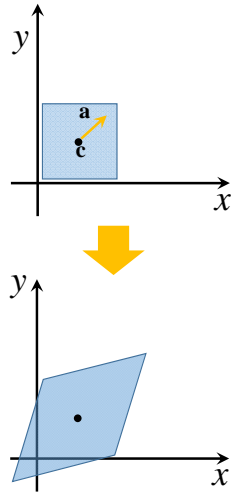
$\mathbf{v}' = \mathbf{T}(c)\mathbf{R}(\theta)\mathbf{T}(-c)\mathbf{v}$  ← 順番に変換行列を掛ける

変換すべてが行列の形で書けるので

- **変換の順序が分かりやすい**
- **変換行列の積を一つの行列として前計算可能:  $\mathbf{v}' = \mathbf{M}\mathbf{v}$**



## 同時座標表現の利点：もう少し複雑な例



例) 重心 $(c_x, c_y)$ を固定して軸 $\mathbf{a}$ 方向に  $s$ 倍

通常の2次元座標表現

$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos -\theta & -\sin -\theta \\ \sin -\theta & \cos -\theta \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$$

同次座標系表現

$$\mathbf{v}' = \mathbf{T}(\mathbf{c})\mathbf{R}(\theta)\mathbf{S}(s, 1)\mathbf{R}(-\theta)\mathbf{T}(-\mathbf{c})\mathbf{v}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_x \\ 0 & 1 & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\theta$ は $\mathbf{a}$ と $x$ 軸の成す角

変換すべてが行列の形で書けるので

- 変換の順序が分かりやすい
- 変換行列の積を一つの行列として前計算可能:  $\mathbf{v}' = \mathbf{M}\mathbf{v}$

## まとめ：アフィン変換と同次座標系

平行移動と線形変換（回転・拡大など行列積による変換）で可能な変換を**アフィン変換**と呼ぶ

二次元空間の点  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  は**同次座標系**で  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$  と表せる

同次座標系表現における基本的な変換行列は以下の通り

| 拡大<br>Scaling   | 回転<br>Rotation   | せん断<br>Skew   | 鏡映<br>Reflectance  | 平行移動<br>Translation   |
|---|--|---|--|---|
| $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ |

## 射影変換

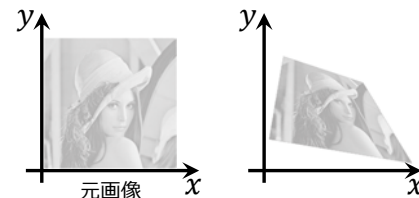
- 同次座標表現した, affine変換の基本変換は, 左下2要素は0, 右下は1
- これらを合成しても, 左下の2要素は0, 右下は1のまま

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 同次座標系表現において, より一般的な下の形の変換を**射影変換**と呼ぶ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

射影変換では, 第三要素が1でなくなる可能性があるため, この式は『=』でなく『同値~』を使って表現される



## 変換の名称と包含関係

